

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

Mention : Mécanique non linéaire et chronométrie

par

Janick BRIEND

Ingénieur ENSMMB

MODÉLISATION DE STRUCTURES DYNAMIQUES A PARTIR D'ESSAIS HARMONIQUES



Soutenue le 30 Octobre 1980, devant la Commission d'examen :

MM. R. CHALEAT, Directeur EMSMM

Président

G. LALLEMENT, Professeur, Docteur d'Etat
R. FILLOD, Maître-Assistant, Docteur d'Etat
P.F. ROBERT, Ingénieur, Division Etudes et
Recherches EDF

} Examineurs

4^e Diss. Besançon



THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCIS-QUÉBEC

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Janick BRIEND

Maitre Ingénieur

MODÉLISATION DE STRUCTURES DYNAMIQUES
A PARTIR D'ESSAIS HARMONIQUES



Soutenue le 20 Décembre 1999, devant la Commission d'examen :

M. J. CHALCAT, Directeur THÈSE

Président

M. LAURENT, Professeur, Directeur THÈSE

Reçu par le

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

Mention : Mécanique non linéaire et chronométrie

par

Janick BRIEND

Ingénieur ENSMMB

**MODÉLISATION DE STRUCTURES DYNAMIQUES
A PARTIR D'ESSAIS HARMONIQUES**



Soutenue le 30 Octobre 1980, devant la Commission d'examen :

MM. R. CHALEAT, Directeur EMSMM

Président

G. LALLEMENT, Professeur, Docteur d'Etat
R. FILLOD, Maître-Assistant, Docteur d'Etat
P.F. ROBERT, Ingénieur, Division Etudes et
Recherches EDF

} Examineurs

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE

Président honoraire : Monsieur le Professeur Jean THIÉBAUT

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique

M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,
UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques	MIELLOU J. Claude	: Analyse numérique
BENILAN Philippe	: Mathématiques	MILLET Bernard	: Botanique
BERNARD Jean	: Chimie Physique	MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale	MOREELS Guy	: Astronomie
BROQUET Paul	: Géologie	OLIVIER Marcel	: Electroniq. quantique
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale	OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique	PAGETTI Jacques	: Chimie appliquée, Génie chimique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique	PARIZET Jean	: Mathématiques
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée	PERROT Roger	: Chimie générale
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée	PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
CHARDON J. Claude	: Spectroscopie	POTIER Robert	: Physique des solides
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie	RANGHEARD Yves	: Géologie
COUGNARD Jean	: Mathématiques	REAL Pierre	: Ecologie animale
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle	RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
DOBREMEZ Jean-Fr.	: Biologie	ROBERT Daniel	: Physique
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale	ROBERT Guy	: Electrochimie
GALATRY Louis	: Physique moléculaire	ROBERT Jacques	: Mathématiques I
GAUDEMER Yves	: Biochimie	THEOBALD J.-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
GIRARDET Claude	: Physique Moléculaire	THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie	TREHEL Michel	: Informatique
GOUARNE René	: Mathématiques	VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
GRAS Georges	: Mathématiques	VIENTOT Jean-Charles	: Physique Gle optique
GREMILLARD Jean	: Mathématiques	WEIL Michel	: Mathématiques
KARCHE J. Paul	: Pétrographie Minéralogie		
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée		
LAUDE Bernard	: Chimie organique		
LESAINTE Pierre	: Mathématiques I		
LHOTE François	: Automatique		
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales		

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique Appliquée de la Faculté des Sciences de Besançon. Je tiens à remercier très sincèrement Monsieur le Professeur CHALEAT, Directeur du Laboratoire, pour l'accueil qu'il m'a réservé et pour les conditions dans lesquelles il m'a permis de préparer cette thèse.

Je remercie très sincèrement Monsieur LALLEMENT, Professeur, d'avoir bien voulu examiner ce travail et participer à ce jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur FILLOD, Docteur d'Etat, pour la bienveillance qu'il a toujours manifestée à mon égard et les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur PIRANDA, Ingénieur C.N.R.S., pour son aide et la disponibilité qu'il a su témoigner à mon égard.

Je voudrais également remercier Monsieur ROBERT, Ingénieur E.D.F., d'avoir bien voulu examiner ce travail et participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à Madame BESSON et Mademoiselle COSTILLE pour le soin apporté à la frappe de ce mémoire ainsi qu'à tous les autres membres du Laboratoire pour leur sympathie.

S O M M A I R E

	Page
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>NOTATIONS</u>	4
<u>CHAPITRE I - PRESENTATION - GENERALITES</u>	6
I.1. <u>Rappels</u>	7
I.1.1. <u>Etude des solutions dans C^n</u>	7
I.1.1.1. β diagonalisable - expression de la réponse forcée	8
I.1.1.2. β non diagonalisable	9
I.1.2. <u>Etude des solutions dans C^{2n}</u>	10
I.1.2.1. Transcription de l'équation du mouvement dans C^{2n} .	10
I.1.2.2. Relation de norme dans C^{2n}	13
I.1.2.3. Expression de la réponse forcée	14
I.1.3. <u>Relation entre les modes propres complexes du système dissipatif et les modes propres réels du système conservatif</u>	15
I.2. <u>Principe de quelques méthodes d'identification</u>	18
<u>CHAPITRE II - METHODE DE LISSAGE DES FONCTIONS DE TRANSFERT</u>	25
II.1. <u>Propriétés des fonctions de transfert des systèmes mécaniques</u>	26
II.1.1. <u>Système à un degré de liberté</u>	26
II.1.1.1. Caractéristiques de l'admittance vitesse	26
II.1.1.2. Caractéristiques de l'admittance déplacement	27
II.1.2. <u>Système à plusieurs degrés de liberté</u>	28
II.1.2.1. Forme géométrique	28
II.1.2.2. Forme analytique	29
a) cas β diagonale	29
b) cas β non diagonale	30

II.2 <u>Exploitation des fonctions de transfert</u>	32
II.2.1. <u>Calcul des éléments propres</u>	32
II.2.1.1. Calcul des valeurs propres	32
II.2.1.2. Calcul des vecteurs propres	33
a) cas β diagonale	33
b) cas β non diagonale	34
II.2.2. <u>Nécessité du lissage</u>	34
II.2.3. <u>Méthode DAT et MEURZEC</u>	36
II.2.4. <u>Problèmes numériques</u>	41
 <u>CHAPITRE III - PROPOSITION D'UNE NOUVELLE METHODE</u>	 42
III.1. <u>Forme analytique des fonctions de transfert :</u> <u>justification</u>	 43
III.2. <u>Technique numérique de lissage</u>	45
III.3. <u>Calcul des vecteurs propres</u>	47
III.3.1. <u>Excitation monopoint</u>	47
III.3.2. <u>Excitation multipoint</u>	50
III.4. <u>Analyse des essais</u>	51
III.4.1. <u>Lissage des fonctions de transfert :</u> <u>programme "LISSAGE"</u>	 53
III.4.1.1. Structure du fichier d'entrée U:1	53
III.4.1.2. Organisation générale du programme	54
III.4.1.3. Structure du fichier de sortie U:2	61
III.4.2. <u>Tracé des réponses forcées mesurées et identi-</u> <u>fiées : programme "REPONSE"</u>	 62
III.4.2.1. Caractéristiques du programme	62
III.4.2.2. Structure du fichier U : 1	63
III.4.2.3. Organisation générale du programme	65
III.5. <u>Résultats obtenus</u>	67
III.5.1. <u>Mesures sur une poutre repliée</u>	67
III.5.2. <u>Mesures industrielles</u>	68
 <u>CHAPITRE IV - CAS D'UNE STRUCTURE NON LINEAIRE</u>	 92
IV.1. <u>Mesures à amplitude constante</u>	93
IV.2. <u>Mesures à force constante pour un mode isolé dans</u> <u>le spectre</u>	 97

<u>CONCLUSION</u>	99
<u>ANNEXE</u> - Organisation des essais en vibration	101
1- Excitation et analyse des vibrations	102
2- Acquisition et traitement de données	104
- principe de l'échantillonnage	105
- détermination de l'amplitude et de la phase des signaux	107
- stockage des résultats	109
- déroulement d'un essai	109
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	113

I N T R O D U C T I O N

La prévision du comportement dynamique des structures passe nécessairement par la connaissance de ses caractéristiques dynamiques (fréquences propres, vecteurs propres et amortissements généralisés). Ces caractéristiques peuvent être soit estimées à partir d'un modèle analytique obtenu par discrétisation du type éléments finis, soit obtenues à partir d'un ensemble de mesures effectuées sur la structure réelle. Cette technique dite d'identification présente l'avantage de tenir compte des caractéristiques propres à chaque structure telles qu'imperfection de réalisation, jeux, raideurs de liaison, et surtout, amortissements, alors qu'un modèle éléments finis ne peut constituer qu'une approche grossière de la structure réelle. Les deux méthodes peuvent cependant être couplées, les résultats de l'identification servant ultérieurement à affiner le modèle mathématique de la structure en recalant les modes et fréquences calculées par rapport à ceux identifiés.

Différentes méthodes ont été développées au laboratoire de Mécanique Appliquée dont certaines ne requièrent qu'un nombre limité de mesures. Cependant, ces techniques sont mises en défaut dès l'instant où les mesures sont trop bruitées ou lorsqu'apparaissent des non-linéarités. Dans ces derniers cas, on a dû revenir à la technique classique de lissage des fonctions de transfert. Les méthodes connues présentant des difficultés dans leurs applications numériques, une nouvelle expression analytique de la fonction de transfert a été employée, permettant un lissage rapide et efficace même dans le cas de pôles rapprochés.

Avant de développer cette méthode nous ferons, dans le premier chapitre, quelques rappels de mécanique vibratoire.

Le chapitre II présente un aperçu des différentes méthodes de lissage des fonctions de transfert couramment utilisées.

Le chapitre III exposera la méthode proposée. On justifiera l'expression analytique choisie pour la fonction de transfert et on

donnera des exemples pratiques validant la méthode tant pour des excitations monopoints que multipoints.

Enfin, le chapitre IV abordera le cas des structures faiblement non-linéaires : on définira une méthodologie permettant d'identifier des structures faiblement non-linéaires à partir des méthodes d'identification linéaire et on proposera une extension de la méthode précédente au cas des systèmes non-linéaires ; cette méthode sera valable si les modes sont découplés ou s'il est possible d'appliquer à la structure une excitation appropriée à chaque mode de sorte qu'un seul mode soit excité.

NOTATIONS

n : dimension du problème
 E : matrice unité
 M : matrice carrée d'ordre n
 B : matrice amortissement, carrée d'ordre n
 K : matrice raideur carrée d'ordre n
 ω : pulsation d'une force excitatrice
 $s = j\omega$; $j^2 = -1$
 s_v : valeur propre complexe $s_v = -a_v \omega_v + j\omega_v$
 a_v : amortissement réduit
 $\lambda = \omega^2$; $\lambda_v = \omega_v^2$

Calcul dans C^n

y : vecteur de dimension n des déplacements sur chaque degré de liberté
 f : vecteur de dimension n des forces appliquées à chaque degré de liberté
 y_v : vecteur propre de dimension n du système dissipatif
 $(M s_v^2 + B s_v + K) y_v = 0$
 y_v^* : vecteur propre de dimension n du système conservatif
 $(K - \lambda_v^* M) y_v^* = 0$
 y_v^+ : vecteur propre du système dissipatif lié à y_v par la relation $y_v^+ = y_v \sqrt{2j\omega_v}$
 Λ : matrice spectrale diagonale des λ_v
 Y : matrice modale dont la $v^{\text{ème}}$ colonne est y_v
 Λ^* : matrice spectrale diagonale des λ_v^*
 Y^* : matrice modale du système conservatif

Calcul dans C^{2n}

z : vecteur de dimension $2n$

y
$\cdot$
y
f
0

F : vecteur de dimension $2n$

L et N : matrices carrées symétriques d'ordre 2n

$$L = \begin{bmatrix} B & M \\ M & O \end{bmatrix} ; \quad N = \begin{bmatrix} K & O \\ O & -M \end{bmatrix}$$

s_v : valeur propre du problème $| L + s_v N | z_v = 0$

z_v : vecteur propre associé à s_v

$$\begin{bmatrix} y_v \\ \cdot \\ y_v \end{bmatrix}$$

$\sim$
S : matrice spectrale diagonale d'ordre 2n

$$\begin{bmatrix} s_v & \\ & \bar{s}_v \end{bmatrix}$$

Z : matrice modale d'ordre 2n dont la $v^{\text{ème}}$ colonne est z_v

$$Z = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & z_v & | & \bar{z}_v \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$s \triangleq j\omega$: lire "s est égal par définition à $j\omega$ " .

CHAPITRE I

PRESENTATION - GENERALITES

I.1. Rappels -

On admet que le mouvement en régime forcé des systèmes mécaniques discrets peut être décrit par l'équation différentielle :

$$M \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) + K y(t) = f(t) \quad (1)$$

où :

- . M, B et K sont respectivement les matrices masse, amortissement et raideur, symétriques, constantes d'ordre n
M est une matrice définie positive
K est une matrice semi-définie positive
- . $y(t)$ est le vecteur colonne de dimension n des déplacements sur chaque degré de liberté
- . $f(t)$ est le vecteur colonne de dimension n des forces appliquées à chaque degré de liberté.

Si on applique à la structure une force harmonique de pulsation ω , l'équation (1) devient :

$$(s^2 M + s B + K) y = f \quad (2)$$

avec $y(t) = y e^{st}$, $s = j \omega$, $f(t) = f e^{st}$

I.1.1. Etude des solutions dans C^n ;

Pour résoudre le système (2), on utilise les solutions propres du système conservatif :

$$(K - \lambda M) y^* = 0 \quad (3) \text{ avec } \lambda = -s^2$$

(3) admet n valeurs propres réelles positives λ_v^* et n vecteurs propres associés linéairement indépendants.

soit Λ^* $(n \times n)$ = $\begin{bmatrix} & & \\ & \lambda & \\ & & \end{bmatrix}$ la matrice spectrale

Y^* $(n \times n)$ = $[y_1^* , \dots , y_n^*]$ la matrice modale

Dans la suite, nous normerons les vecteurs propres, tels que :

$$T_{Y^*}^T M Y^* = E \quad (4) \quad \text{et} \quad T_{Y^*}^T K Y^* = \Lambda^* \quad (5)$$

On peut utiliser la base des vecteurs propres du système conservatif pour résoudre l'équation (2).

La réponse y peut être décomposée sur la base du système conservatif associé. Soit $y = Y^* \cdot c$ où c est un vecteur $(n \times 1)$ représentant les composantes de y dans la base Y^* .

L'équation (2) : $(s^2 M + s B + K) y = f$ devient :

$$(s^2 M + s B + K) Y^* \cdot c = f \quad (6)$$

En multipliant l'équation (6) à gauche par $T_{Y^*}^T$ pour faire apparaître les relations de norme (4) et (5), on obtient :

$$T_{Y^*}^T (s^2 M + s B + K) Y^* \cdot c = T_{Y^*}^T \cdot f \quad \text{avec } \lambda = -s^2 = \omega^2$$

la relation $y = Y^* \cdot c$ permet d'écrire la réponse forcée :

$$y = Y^* (\Lambda^* - \lambda E + j \sqrt{\lambda} \beta)^{-1} T_{Y^*}^T f \quad (7)$$

Deux cas sont à considérer :

I.1.1.1. β diagonalisable - expression de la réponse forcée

Cette hypothèse émise par Basile [1] est souvent admise. Dans ce cas, la matrice $[\Lambda^* - \lambda E + j \sqrt{\lambda} \beta]$ est diagonale et s'inverse sans difficulté. La réponse forcée s'exprime alors sous la forme d'une somme des contributions de chaque mode propre :

$$y = \sum_{v=1}^n \frac{y_v^* T y_v^*}{\lambda^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{vv}^*} \cdot f \quad (8)$$

$$\text{où : } y = \sum_{v=1}^n \frac{y_v^* T y_v^*}{s^2 + s \beta_{vv}^* + \lambda_v^*} \cdot f \quad (9) \text{ avec } s = j \omega$$

Soit la fonction de transfert entre le point d'excitation i et le point de mesure k :

$$\Gamma_{ik}(s) = \sum_{v=1}^n \frac{y_{vi}^* y_{vk}^*}{s^2 + s \beta_{vv}^* + \lambda_v^*}$$

Le dénominateur étant un polynôme à coefficients réels, Γ_{ik} peut être décomposée en éléments simples sous la forme :

$$\Gamma_{ik}(x) = \sum_{v=1}^n \frac{A_{vik}^*}{s - s_v^*} + \frac{\bar{A}_{vik}^*}{s - \bar{s}_v^*} \quad (10)$$

où s_v^* représente la pulsation complexe.

On montre facilement en identifiant ces deux expressions de Γ_{ik} , que A_{vik}^* est purement imaginaire et que :

$$2 \operatorname{Re}(s_v^*) = -\beta_{vv}^*$$

$$\lambda_v^* = ||s_v^*||^2$$

La forme de l'expression (10) permet de déterminer une bonne approximation de la réponse forcée, en ne prenant dans la série que les seuls modes ayant une contribution importante pour la pulsation d'excitation ω .

I.1.1.2. β n'est pas diagonale :

La matrice $[\Lambda^* - \lambda E + j \sqrt{\lambda} \beta^*]$ est pleine. Son inversion nécessite donc la connaissance de tous les éléments ce qui n'est en pratique jamais réalisé puisque l'on tronque la suite des modes propres.

Du fait du couplage par amortissement, il n'est plus possible de donner l'expression de la réponse forcée sous la forme (10). Cependant, nous allons montrer qu'il est encore possible d'exprimer la solution forcée sous forme d'un développement en série de fonctions propres complexes à condition d'exprimer les solutions de (2) dans C^{2n} .

I.1.2. Etude des solutions dans C^{2n} :

I.1.2.1. Transcription de l'équation du mouvement dans C^{2n} :

L'équation générale $M \ddot{y} + B \dot{y} + K y = f$ peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du 1er ordre par rapport au temps en posant $z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ où z est de dimension $2n$.

$$L z + N \dot{z} = F \quad F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Il existe de nombreuses possibilités pour construire les matrices L et N $[2]$. Pour simplifier la résolution du système (11), on a intérêt, puisque M , B et K sont des matrices symétriques, à choisir L et N symétriques. On prend :

$$N = \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les vecteurs propres du système homogène ont la propriété d'être orthogonaux relativement aux matrices L et N .

En effet, considérons le système homogène :

$$L z + N \dot{z} = 0 \quad (12)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$z(t) = z e^{st} \quad \text{d'où :}$$

$$(L + s N) z = 0 \quad (13)$$

(13) admet $2n$ valeurs propres s_j que l'on supposera toutes distinctes et $2n$ vecteurs propres associés. On désignera respectivement par $\hat{z}$ et $\hat{s}$

les matrices spectrale diagonale et modale du problème (13).

Soient z_v et z_σ les vecteurs propres associés aux valeurs propres s_v et s_σ . On a par définition :

$$\begin{cases} L z_v + s_v N z_v = 0 \\ L z_\sigma + s_\sigma N z_\sigma = 0 \end{cases}$$

Multiplions la première équation à gauche par T_{z_σ} , la seconde par T_{z_v} . Il vient :

$$\begin{cases} T_{z_\sigma} L z_v + s_v T_{z_\sigma} N z_v = 0 \\ T_{z_v} L z_\sigma + s_\sigma T_{z_v} N z_\sigma = 0 \end{cases} \quad (14)$$

or $T_{z_\sigma} (L z_v) = T_{z_v} T_L z_\sigma = T_{z_v} L z_\sigma$ puisque L est symétrique.

De même pour N , $T_{z_\sigma} (N z_v) = T_{z_v} N z_\sigma$.

En transposant la première équation on a donc :

$$T_{z_v} L z_\sigma + s_v T_{z_v} N z_\sigma = 0$$

et en la soustrayant de la deuxième, on obtient :

$$(s_\sigma - s_v) T_{z_v} N z_\sigma = 0$$

d'où : $T_{z_v} N z_\sigma = 0$ si $v \neq \sigma$.

Lorsque $v = \sigma$, $T_{z_v} N z_v$ est indéterminé. (Les vecteurs propres sont définis à une constante près). On fixe cette constante par la norme :

$$T_{z_v} N z_v = d_{vv}$$

En utilisant l'une quelconque des relations (14), il vient :

$${}^T z_v L z_\sigma = - s_\sigma d_{v\sigma} \delta_{\sigma v} \text{ où } \delta_{\sigma v} \text{ est le symbole de Kronecher}$$

Dans tous les cas courants de la mécanique, l'amortissement est suffisamment faible pour que toutes les racines s_v soient complexes. Elles apparaissent alors par paires conjuguées.

En effet, si s_v est solution de

$$(L + s_v N) z_v = 0 \quad \text{alors } \bar{s}_v \text{ est solution de l'équation conjuguée :}$$

$$(L + \bar{s}_v N) \bar{z}_v = 0$$

Les matrices spectrale et modale ont donc la forme particulière :

$$\tilde{S} = \begin{array}{|c|c|} \hline S & \\ \hline & -S \\ \hline \end{array} \quad (2n \times 2n)$$

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & \bar{z}_1 \\ \hline \end{array} \quad (2n \times 2n)$$

Compte tenu de la structure de $z = \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \dot{y} \\ \hline \end{array} \quad (2n \times 1)$, la matrice modale

Z s'écrit :

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline y_v & \bar{y}_v \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{y}_v & y_v \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline s_v y_v & \bar{s}_v \bar{y}_v \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{s}_v \bar{y}_v & s_v y_v \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline Y & \bar{Y} \\ \hline Y S & \bar{Y} S \\ \hline \end{array}$$

$\xleftrightarrow{\hspace{1.5cm}} \hspace{1.5cm} \xleftrightarrow{\hspace{1.5cm}}$
 $n \hspace{1.5cm} n$

I.1.2.2. Relation de norme dans C_-^{2n} :

On a vu que l'on fixait l'amplitude des vecteurs propres $\bar{y}_v$ au moyen d'un coefficient de "norme" d_{vv} que l'on peut prendre réel ou complexe. Compte tenu de l'hypothèse faite sur les amortissements on associe à chaque relation de "norme" :

$$T_{z_v} N z_v = d_{vv} \quad \text{la relation conjuguée :}$$

$$T_{\bar{z}_v} N \bar{z}_v = \bar{d}_{vv}$$

Matriciellement, la relation de "norme" s'écrit donc :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T_Y & S^T Y \\ \hline T_{\bar{Y}} & \bar{S}^T \bar{Y} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline B & M \\ \hline M & O \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline Y & \bar{Y} \\ \hline Y S & \bar{Y} \bar{S} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{---} d \text{---} & O \\ \hline O & \text{---} \bar{d} \text{---} \\ \hline \end{array}$$

$2n \times 2n$

où d est la matrice diagonale de "norme".

Si l'on développe cette expression, il vient :

$$T_Y B Y + T_Y M Y S + S^T Y M Y = d$$

d'où la relation de "norme" :

$$\boxed{T_{y_v} B y_v + 2s_v T_{y_v} M y_v = d_{vv} \quad v = 1 \text{ à } n \quad (15)}$$

Pour simplifier l'expression de la réponse forcée, nous prendrons comme norme $d = E$ où E est la matrice unité.

Nous aurons donc les relations matricielles suivantes dans $2n$:

$$\boxed{T_Z N Z = E} \quad \text{et} \quad \boxed{T_Z L Z = -\tilde{S}} \quad (16)$$

I.1.2.3. Expression de la réponse forcée :

De la même façon que dans C^n , nous allons résoudre le système

$$(L + s N) z = F \quad (17) \quad \text{avec} \quad F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

en décomposant z sur la base modale Z du système homogène

$$(L + s N) z = 0$$

Posons $z = Z \cdot c$ où c est le vecteur $(2n \times 1)$ des composantes de z dans Z .

$$\text{L'équation (17) devient } (L + s N) Z \cdot c = F \quad (18)$$

soit en multipliant, à gauche par T_Z :

$$T_Z (L + s N) Z \cdot c = T_Z \cdot F$$

Compte tenu des relations de norme (16), nous avons :

$$(-\tilde{S} + s E) c = T_Z \cdot F$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \text{---} & & \\ & S & \\ & & \text{---} \\ & & & \tilde{S} & \\ & & & & \text{---} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} + s \begin{bmatrix} \text{---} & & \\ & E & \\ & & \text{---} \\ & & & E & \\ & & & & \text{---} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} T_Z \cdot F \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

$$\text{d'où } c = \Omega^T Z F \quad \text{avec} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-s_v} & \\ & \frac{1}{s-\bar{s}_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \\ & \Omega_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } z = Z \cdot \Omega^T Z F$$

Dans la pratique, on ne s'intéresse qu'à la réponse forcée y .

Compte-tenu de ce que $z = \begin{bmatrix} y \\ sy \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$, si on développe l'expression ci-dessus, il vient :

$$y = [Y \Omega_1^T Y + \bar{Y} \Omega_2^T \bar{Y}] f$$

Ω_1 et Ω_2 étant des matrices diagonales, on peut à nouveau écrire y sous la forme d'un développement en série de modes propres :

$$y = \sum_{v=1}^n \left[\frac{y_v T_{y_v}}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v T_{\bar{y}_v}}{s - \bar{s}_v} \right] \cdot f \quad (19)$$

En conclusion, lorsque B n'est pas diagonalisable, il suffit d'exprimer les solutions dans c^{2n} . En choisissant convenablement les matrices L et N symétriques, on obtient un système $(L + sN) z = 0$ diagonalisable. Les vecteurs propres sont orthogonaux et l'on peut décomposer les solutions de $(L + sN) z = F$ sur la base des vecteurs propres du système homogène. On obtient à nouveau la réponse sous forme d'un développement en série de modes propres. Il sera donc avantageux d'utiliser ce type de développement puisqu'il ne fait aucune hypothèse sur la structure de la matrice B .

I.1.3. Relation entre les modes propres complexes du système dissipatif et les modes propres réels du système conservatif

On suppose que les valeurs propres sont distinctes et que les forces d'amortissement sont petites devant les forces d'inertie et de raideur (c'est un cas courant).

On peut passer du système conservatif au système dissipatif en introduisant l'amortissement sous forme de perturbation. La relation entre modes propres des systèmes dissipatif et conservatif sera déterminée au second ordre près.

Les équations d'équilibre modal avec et sans amortissement s'écrivent :

- structure conservative :

$$- M Y^{\star} \Omega_0^2 + K Y^{\star} = 0 \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} \Lambda^{\star} \triangleq \Omega_0^2 = \begin{array}{|c|} \hline \omega_v^2 \\ \hline \end{array} \\ T_{Y^{\star}} M Y^{\star} = E \end{array} \right.$$

- structure dissipative :

$$M Y S^2 + B Y S + K Y = 0$$

où Y est défini page 12 et $Y^{\star}$ 8.

On pose $T_{Y^{\star}} B Y^{\star} = \beta$ où β est la matrice des amortissements généralisées. On suppose que les valeurs propres et vecteurs propres sont faiblement perturbés par l'amortissement et nous poserons :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = j \Omega_0 + V \\ Y = Y^{\star} (E + j Q) \end{array} \right. \quad (19)$$

On suppose que $|V_i| \ll \Omega_{oi} \quad \forall i$

$$|Q_{ij}| \ll 1 \quad \forall i, j$$

Cette condition ne sera vérifiée que si la norme d des vecteurs propres du système dissipatif est convenablement choisie :

Le développement de la relation de norme donnée en I.1.2.2. donne :

$$\begin{cases} T_Y B Y + T_Y M Y S + S T_Y M Y = d \\ T_Y B \bar{Y} + T_Y M \bar{Y} \bar{S} + S T_Y M \bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

La matrice modale Y doit tendre vers Y^* lorsque $\beta \rightarrow 0$
d'où $d = 2j\omega_v$.

On devra écrire la relation de norme sous la forme :

$$T_Y M Y S + S T_Y M Y + T_Y B Y = 2j \Omega_0$$

En reportant les relations (19) dans (20) on obtient au second ordre près en prenant $\beta = T_{Y^*} B Y^* \approx T_Y B Y$ des expressions simples de la matrice généralisée β .

$$\beta = -2V + \Omega_0 (Q + TQ) + (Q + TQ) \Omega$$

$$\beta = -2V + \Omega_0 (TQ - Q) + (Q - TQ) \Omega$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= -2V + Q \Omega_0 + \Omega_0 TQ \\ 0 &= \Omega_0 Q + TQ \Omega_0 \end{aligned}} \quad (21)$$

Cette dernière relation entraîne que $Q_{vv} = 0$ donc $\beta_{vv} = -2V_{vv}$ et la matrice diagonale V est réelle, donc Q est une matrice réelle.

Il en résulte que la partie réelle du mode propre est identique au mode propre du système conservatif au second ordre près, la perturbation est purement imaginaire et orthogonale à la partie réelle, relativement à M .

Dans le cas où on aura identifié des vecteurs propres vérifiant la relation de norme :

$${}^T y_v B y_v + 2 s_v {}^T y_v M y_v = 1 \quad ,$$

on pourra se ramener à des vecteurs propres y_v^+ compatibles avec ceux du système conservatif par la relation :

$$y_v^+ = y_v \sqrt{2 j \omega_v} \quad \text{on a alors } y_v^* \neq \Re(y_v^+)$$

Pour un système à amortissement généralisé diagonal, on a $Q = 0$. Les modes propres y_v^+ sont purement réels alors que y_v a des parties réelle et imaginaire du même ordre.

Le calcul de y_v^+ permet donc de se rendre compte du couplage par amortissement entre modes. Un vecteur propre à partie imaginaire très petite devant la partie réelle signifie que le couplage entre modes par amortissement est quasi-nul.

I.2.Principe de quelques méthodes d'identification

Il y a une quarantaine d'années, l'identification modale se résumait à la méthode dite de "résonance d'amplitude". Elle consiste à exciter la structure par un système de forces harmoniques de même pulsation ω et à mesurer la réponse forcée en un nombre

suffisant de points pour qu'aucun mode ne soit ignoré. Le tracé de cette réponse en fonction de la fréquence d'excitation donne des informations permettant de caractériser chaque mode. Cette méthode perd néanmoins tout intérêt dès que deux modes sont très proches ou couplés par amortissement.

Une nouvelle méthode dite de l'admittance complexe a été proposée par KENNEDY et PANCU en 1947 [3]. On ne mesure plus simplement l'amplitude mais également la phase de la réponse forcée. Dans le plan complexe (ou de Nyquist), on trace l'admittance complexe définie par :

$$\Gamma_{ik}(\omega) = \frac{y_i(\omega)}{f_k(\omega)} = \Gamma_1(\omega) + j \Gamma_2(\omega)$$

avec ω : pulsation d'excitation

$y_i(\omega)$: réponse forcée complexe au point i

$f_k(\omega)$: force excitatrice au point k

La figure 1 donne un exemple de courbe d'admittance complexe

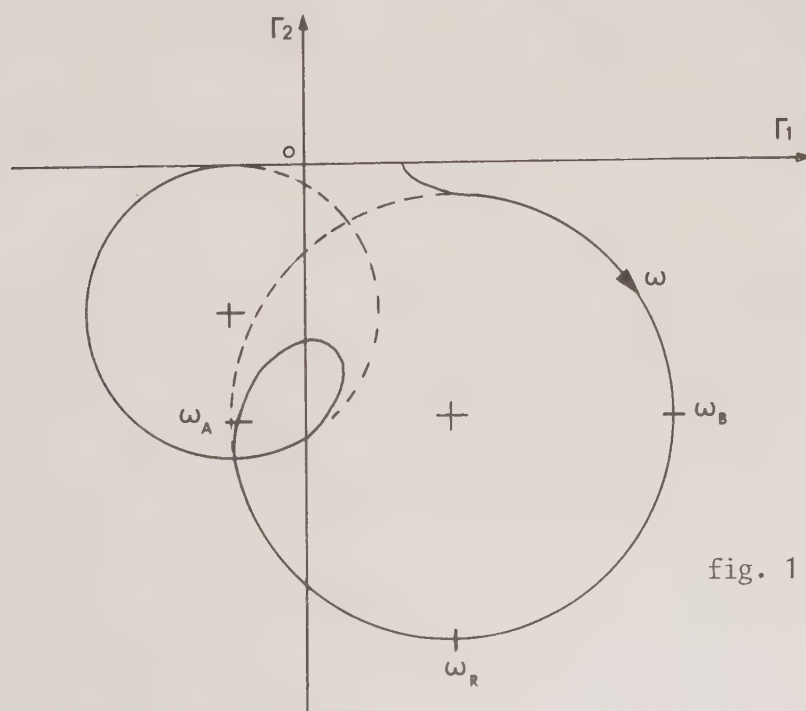


fig. 1

Pour un modèle isolé d'une structure linéaire, la courbe d'admittance complexe est voisine d'un cercle déterminant complètement le mode propre.

Pour déterminer la réponse forcée avec plusieurs modes, on trace les cercles qui s'ajustent aux mieux aux arcs de courbe pour lesquels la partie imaginaire de l'admittance est localement extrême (voir fig. 1). Chaque cercle obtenu définit un mode propre de la structure : le diamètre AB est proportionnel à l'amplitude du mode propre, la pulsation propre est ω_R et l'amortissement s'obtient avec une technique de largeur de bande par l'intermédiaire du coefficient de surtension :

$$Q = \frac{\omega_R}{\omega_A - \omega_B}$$

Les auteurs [4] , [5] ont montré que cette méthode était supérieure à celle de la résonance d'amplitude. Toutefois, elle est difficile à appliquer car il faut tracer les courbes d'admittance et les résultats obtenus sont très imprécis.

C'est en 1950 que LEWIS et WRISLEY [6] font appel à une notion nouvelle dite "d'appropriation". Approprier consiste à déterminer, à partir des mesures, les forces harmoniques à appliquer à une structure pour obtenir une réponse proportionnelle à un mode propre du système conservatif associé et la fréquence propre correspondante.

A. DECK [7,8] a développé à l'ONERA une méthode automatique d'appropriation : la force appropriée est déterminée par approximations successives. On suppose que les différentes fréquences propres ont été isolées. Le principe de l'essai consiste à rechercher le minimum de la réponse y_r en phase avec l'excitation en faisant varier successivement chaque force appliquée à la structure ainsi que la fréquence

$$\text{si } y = y_r + j y_i \text{ en minimise } \frac{\|y_r\|}{\|y_i\|} = \text{tg } \phi_m$$

ϕ_m est le déphasage moyen qui doit être nul si l'appropriation est parfaite.

Cette méthode a l'avantage d'être bien adaptée à l'automatisation. Cependant, la convergence peut être mise en défaut quand deux fréquences propres sont voisines. De plus, on risque "d'oublier" un mode qui ne serait pas apparu lors d'un balayage en fréquence préalable.

La méthode développée par D. CLERC [9-12] à l'ONERA permet de calculer directement les forces appropriées, à partir d'une suite de $n \times p$ réponses y mesurées à une suite de n fréquences données, pour p configurations d'excitations linéairement indépendantes.

Soit $y = y_r + j y_i$ une réponse mesurée en N points.

f : la matrice colonne des forces excitatrices produisant le déplacement y .

Avec les p réponses mesurées on forme les matrices V et W de dimensions (n, p) dont les colonnes sont respectivement les parties en phase y_r et en quadrature y_i par rapport à la force excitatrice. La force excitatrice f sera rangée dans la colonne correspondante d'une matrice F de même dimension (n, p) .

Si on applique à la structure la force $f = F a$ (a étant un vecteur constant de dimension $(p \times 1)$), la réponse de la structure sera :

$$y = (V + j W) a$$

Il suffit donc de chercher a qui minimise :

$$\delta = \frac{\|V_a\|}{\|W_a\|}$$

Si on trace δ_{mini} en fonction de ω ; on obtient une courbe de forme parabolique dont le minimum donne ω_v et le vecteur W_{ω_v} correspondant est le mode propre associé à ω_v .

La méthode est systématique. Elle utilise l'information donnée par tous les capteurs. Deux modes voisins sont facilement détectés et isolés mais il faut un trop grand nombre de mesures pour obtenir un mode propre (environ $6 \times p$ avec $n = 100$ à 300 et $p = 5$ à 10).

TRAIL-NASH [13] avait déjà exploité la même idée en 1958 sous une forme moins élaborée.

G. DE VRIES [14] a cherché à éliminer l'amortissement d'un mode en réinjectant sur la structure des forces proportionnelles à la vitesse. Les mesures peuvent être faites en auto-oscillation. Le dosage des contre réactions présente autant de difficultés que la recherche d'une force appropriée et le matériel à mettre en oeuvre est relativement plus important.

ANGELINI J.J. [15] exploite la matrice ${}^T_V F$ formée à partir de la partie réelle V de p réponses de la structure à p configurations d'excitation F linéairement indépendantes de même pulsation ω . On utilise la propriété $\det |{}^T_V F| = 0$ si $\omega = \omega_v$.
G.W. ASHER [16] semble avoir exploité la même idée sous une forme différente. La méthode demande un très grand nombre de mesures et n'exploite que les composantes des déplacements forcés aux points où ont été placés les excitateurs.

Aucune de ces méthodes dite "d'appropriation" des forces d'excitation ne donne entière satisfaction à l'utilisateur. De nombreux échecs ont été constatés dès lors que l'hypothèse de BASILE n'est plus vérifiée. En effet, l'appropriation qui est un concept mathématique clair, est malheureusement fondée sur un critère expérimental (critère de réponse équiphase) peu sensible : l'observateur peut très souvent avoir l'impression d'une appropriation parfaite alors que l'excitation est loin d'être adaptée.

Ceci explique le développement récent des méthodes d'identification modale n'exigeant pas l'appropriation des forces excitatrices. Récemment, FILLOD et PIRANDA [17], [18] ont formulé une nouvelle méthode d'identification sans appropriation. Celle-ci consiste à fournir à la structure une série de configurations d'excitations indépendantes et non appropriées.

A partir de réponses forcées mesurées, on peut calculer les forces appropriées aux modes les plus voisins et obtenir ainsi les vecteurs propres correspondants uniquement à partir du calcul. Les paramètres généralisés sont obtenus par microbalayage autour de la fréquence propre sans toutefois faire appel à la réalisation effective de l'appropriation. Cette méthode permet de détecter et séparer très facilement des modes propres proches, même dans le cas où ils sont couplés par amortissement.

Parallèlement à ce dernier développement des méthodes d'identification, sont apparues des méthodes analytiques de détermination des solutions propres qui doivent leur origine aux progrès importants effectués dans le domaine des mini calculateurs et au développement de matériels type analyseur de Fourier très performants.

Quelques publications [19], [20], [21], [22] illustrent largement ces nouvelles méthodes. Elles reposent sur la mesure de fonctions de transfert entre différents points d'une structure dont le modèle est à amortissement visqueux. L'ensemble de ces fonctions de transfert forme la matrice de transfert qui n'est autre que la matrice de souplesse dynamique $\Gamma(s)$ avec $s = j\omega$. Son expression analytique est :

$$\Gamma(s) = \sum_{v=1}^N \left[\frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v} \right]$$

avec $s_v = -a_v \omega_v + j \omega_v$

$$\frac{1}{2a_v} = Q_v \quad : \text{coefficient de surtension}$$

y_v : vecteur propre associé au $v^{\text{ème}}$ mode propre.

POTTER et RICHARDSON [19] ont d'abord montré que pour une matrice Γ symétrique, on peut déterminer les caractéristiques dynamiques de la structure en ne calculant qu'une seule ligne ou une seule colonne de la matrice de transfert.

Cependant, dans de nombreux cas, de faibles non-linéarités mettent en défaut la condition de réciprocité (Γ symétrique). RICHARDSON et KNISTERN [22] ont résolu ce problème en proposant une méthode qui utilise les données d'autres lignes et colonnes de la matrice de transfert.

CHAPITRE II

METHODE DE LISSAGE DES FONCTIONS DE TRANSFERT

II.1. Etude des fonctions de transfert des systèmes mécaniques -

II.1.1. Rappels sur les systèmes à un degré de liberté :

L'équation du mouvement d'un système dissipatif à un degré de liberté, en régime harmonique est :

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = m f_0 e^{i\omega t}$$

On pose : $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} & ; \omega_0 : \text{pulsation propre de l'oscillateur non amorti} \\ b = 2 m a \omega_0 & ; a : \text{coefficient d'amortissement réduit} \end{cases}$

Il vient :

$$\ddot{x} + 2 a \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

La solution permanente, de la forme $x_0 e^{i\omega t}$, est :

$$x = x_0 e^{i\omega t} = \frac{f_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 i a \omega_0 \omega}$$

II.1.1.1. Propriétés de l'admittance vitesse :

La vitesse a pour expression :

$$v = \dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega f_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 i a \omega_0 \omega}$$

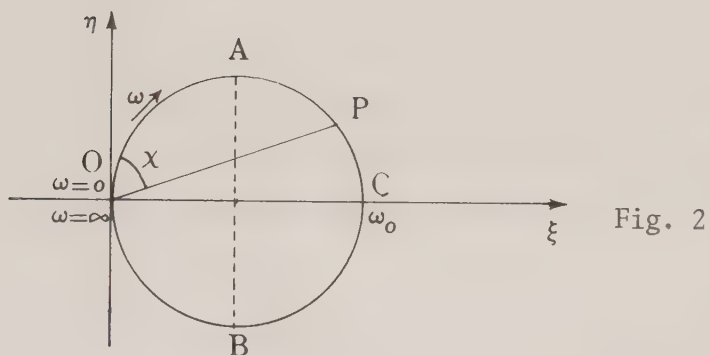
et l'admittance vitesse est :

$$\alpha' = \frac{i\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 i a \omega_0 \omega} = \xi + i \eta$$

$$\text{avec } \begin{cases} \xi = \frac{2 a \omega_0 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 a^2 \omega_0^2 \omega^2} \\ \eta = \frac{-\omega (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 a^2 \omega_0^2 \omega^2} \end{cases}$$

si on élimine ω entre les expressions de ξ et η , il vient :

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{2a \omega_0} \xi = 0 \quad \text{cad} \quad \left(\xi - \frac{1}{4a \omega_0}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{16a^2 \omega_0^2}$$



C'est l'équation d'un cercle (fig. 2) qui est décrit entièrement dans le sens rétrograde par le point courant $P(\xi, \eta)$ lorsque ω varie de 0 à 1^∞ . L'admittance a son module égal à OP et sa phase égale à χ .

Ainsi, la réponse en vitesse est globalement représentée par un cercle. Ce cercle possède les propriétés suivantes :

- son diamètre est égal à $\frac{1}{4a \omega_0}$
- le point C, sur $O\xi$, correspond à l'amplitude maximale pour $\omega = \omega_R$ tel que $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ cad $\omega = \omega_0$
- si on désigne par A et B les extrémités du diamètre perpendiculaire à OC, on a :

$$\omega_B - \omega_A = 2a \omega_0$$

si a est petit, le demi-cercle ACB correspond à une très faible variation de la fréquence ω autour de la résonance de phase ω_R .

II.1.1.2. Caractéristiques de l'admittance déplacement :

L'admittance déplacement est :

$$\alpha = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i a \omega_0 \omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega_0^2 \omega^2} - i \frac{2a \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4a^2 \omega_0^2 \omega^2}$$

La représentation dans le plan complexe est voisine de celle d'un cercle. En effet, la portion A' C' B' est obtenue à partir de la portion A C B de l'admittance vitesse en divisant α par $j\omega$ où ω est quasi constant dans cet intervalle.

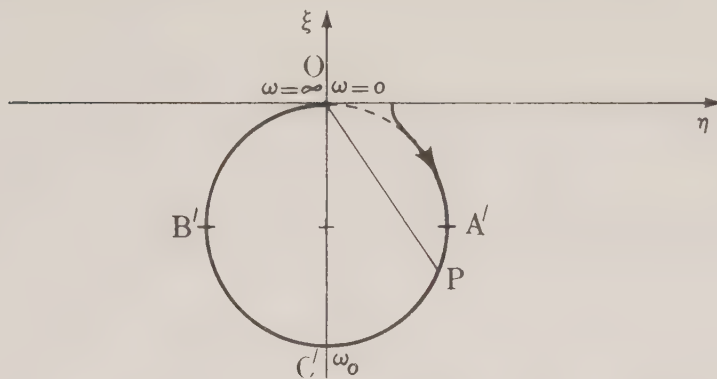


Fig. 3

II.1.2. Système à plusieurs degrés de liberté :

II.1.2.1. Forme géométrique :

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, nous avons vu (I.2) que la courbe formait plusieurs boucles, chacune d'entre elles s'inscrivant dans un cercle associé à une fréquence propre

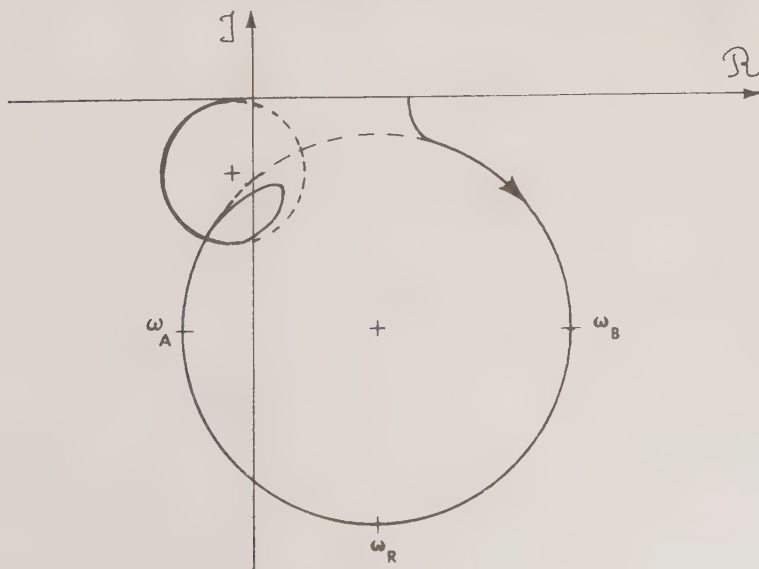


Fig. 4

II.1.2.2. Forme analytique :

Pour une structure donnée à n degrés de liberté, on ne prend généralement en considération qu'un nombre restreint p de modes contribuant effectivement au mouvement de la structure dans la bande de fréquence analysée. Dans ce cas, la fonction de transfert peut encore se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle à coefficients réels.

a. cas β diagonale:

C'est le cas le plus simple, la réponse forcée s'écrit (voir Chap. I.1.1.1.) :

$$y = \sum_{v=1}^n \frac{y_v^* T_{y_v}^*}{\lambda_v^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{vv}^*} f \quad \text{avec} \quad \lambda = \omega^2$$

En regroupant les p modes prédominants, on a :

$$y = \left[\sum_{v=1}^p \frac{y_v^* T_{y_v}^*}{\lambda_v^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{vv}^*} + \sum_{\sigma=p+1}^n \frac{y_\sigma^* T_{y_\sigma}^*}{\lambda_\sigma^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{\sigma\sigma}^*} \right] f$$

si l'on a pris un nombre p suffisant de modes $\lambda_\sigma \gg \lambda$ et

$$| \lambda_v^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{vv}^* | \ll | \lambda_\sigma^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{\sigma\sigma}^* |$$

$$y \approx \sum_{v=1}^p \frac{y_v^* T_{y_v}^*}{\lambda_v^* - \lambda + j \sqrt{\lambda} \beta_{vv}^*} f = \sum_{v=1}^p \frac{y_v^* T_{y_v}^*}{s^2 + s \beta_{vv}^* - s_v^{*2}} f \quad (1)$$

où $s \triangleq j \sqrt{\lambda}$

La fonction de transfert est une somme de p fractions rationnelles. Les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes en s à coefficients réels de degrés respectivement 0 et 2. Si l'on réduit au même dénominateur, on obtiendra la fonction de transfert sous forme d'un rapport de polynômes d'ordre $2p-2$ pour le numérateur et $2p$ pour le dénominateur.

b. cas β non diagonale :

L'étude dans C^{2n} a donné l'expression de la réponse forcée suivante (chap. I.1.2.3.) :

$$y = \left[\sum_{v=1}^n \frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v} \right] f \quad (2)$$

à partir de la relation $z = Z \Omega^T Z F$ (3)

avec $z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$; $Z = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} \\ YS & \bar{Y}\bar{S} \end{bmatrix}$; $\Omega = \begin{bmatrix} |sE-S|^{-1} & \\ & |sE-\bar{S}|^{-1} \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$

On peut montrer si l'on considère tous les modes que la fonction de transfert est encore un rapport de polynômes dont la différence de degré est 2. En effet, la relation (3) s'écrit :

$$y = Y [sE - S]^{-1} T_Y f + \bar{Y} [sE - \bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}} f$$

$$\dot{y} = YS [sE - S]^{-1} T_Y f + \bar{Y}\bar{S} [sE - \bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}} f$$

nous avons $\dot{y} = sy$ donc :

$$sY [sE - S]^{-1} T_Y + s \bar{Y} [sE - \bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}} = YS [sE-S]^{-1} T_Y + \bar{Y}\bar{S} [sE-\bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}}$$

$$[YS - sYE] [sE-S]^{-1} T_Y + [\bar{Y}\bar{S} - s\bar{Y}E] [sE - \bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}} = 0$$

$$Y [sE - S] [sE - S]^{-1} T_Y + \bar{Y} [sE - \bar{S}] [sE - \bar{S}]^{-1} T_{\bar{Y}} = 0$$

d'où la relation $Y^T T_Y + \bar{Y}^T T_{\bar{Y}} = 0$ c'est-à-dire :

$$\sum_{v=1}^n y_v^T y_v + \bar{y}_v^T \bar{y}_v = 0$$

. Etude des degrés du numérateur et dénominateur de

$$\Gamma = \sum_{v=1}^n \left[\frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v} \right]$$

Réduisons au même dénominateur :

$$\Gamma = \frac{M}{D} = \frac{\sum_{v=1}^n \frac{y_v^T y_v (s - \bar{s}_v) \prod_{\sigma=1, \sigma \neq v}^n (s - \bar{s}_\sigma) (s - s_\sigma) + \bar{y}_v^T \bar{y}_v (s - s_v) \prod_{\sigma=1, \sigma \neq v}^n (s - s_\sigma) (s - \bar{s}_\sigma)}{\prod_{\sigma=1}^n (s - s_\sigma) (s - \bar{s}_\sigma)}}$$

D est de degré 2n en s.

Examinons le numérateur :

$$\prod_{\sigma=1, \sigma \neq v}^n (s - \bar{s}_\sigma) (s - s_\sigma) = s^{2n-2} + a_{v,2n-3} s^{2n-3} + a_{v,2n-4} s^{2n-4} + \dots + a_{v,1} s + a_{v,0}$$

$$(s - \bar{s}_v) \prod_{\sigma=1, \sigma \neq v}^n (s - \bar{s}_\sigma) (s - s_\sigma) = s^{2n-1} + b_{v,2n-2} s^{2n-2} + b_{v,2n-3} s^{2n-3} + \dots + b_{v,1} s + b_{v,0}$$

de même :

$$(s - s_v) \prod_{\sigma=1, \sigma \neq v}^n (s - s_\sigma) (s - \bar{s}_\sigma) = s^{2n-1} + c_{v,2n-2} s^{2n-2} + c_{v,2n-3} s^{2n-3} + \dots + c_{v,1} s + c_{v,0}$$

$$\text{d'où } M = s^{2n-1} \left(\sum_{v=1}^n y_v^T y_v + \bar{y}_v^T \bar{y}_v \right) + \sum_{v=1}^n \left((b_{v,2n-2} s^{2n-2} + \dots + b_{v,0}) y_v^T y_v + \right.$$

$$\left. (c_{v,2n-2} s^{2n-2} + \dots + c_{v,0}) \bar{y}_v^T \bar{y}_v \right)$$

donc M est de degré 2n - 2 en s.

. Montrons que les coefficients des polynômes sont réels :

$$y = \sum_{v=1}^n \frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v} \quad f$$

$$\text{posons } A_v = y_v^T y_v$$

$$y = \sum_{v=1}^n \frac{(s - \bar{s}_v) A_v + (s - s_v) \bar{A}_v}{s^2 - s(s_v + \bar{s}_v) + s_v \bar{s}_v} \quad f = \sum_{v=1}^n \frac{s(A_v + \bar{A}_v) - (\bar{s}_v A_v + s_v \bar{A}_v)}{s^2 - s(s_v + \bar{s}_v) + s_v \bar{s}_v}$$

Les coefficients étant la somme ou le produit de 2 nombres complexes conjugués, sont réels.

En conclusion, on voit que quelque soit la nature de la matrice d'amortissement, on peut toujours développer la fonction de transfert sous forme d'un rapport de polynômes dont la différence de degrés entre numérateur et dénominateur est 2, à condition de prendre en compte tous les modes.

Lorsque l'on tronque le nombre de modes, ce qui est toujours le cas, cette forme de développement n'est acceptable que lorsque la matrice des amortissements généralisés est diagonale. Cela constitue donc une limite puisque, approximer une fonction de transfert par un rapport de polynômes à coefficients réels avec différence de degrés 2 revient à supposer que l'amortissement est diagonal et que l'on peut totalement négliger la contribution des autres modes.

II.2. Exploitation des fonctions de transfert sous forme de rapport de polynômes :

II.2.1. Calcul des éléments propres :

Supposons que la fonction de transfert $\Gamma(s)$ soit connue sous la forme d'un rapport de polynômes à coefficients réels. On montrera au chapitre II.2.3. comment calculer ces coefficients :

$$\Gamma(s) = \frac{\sum_{r=1}^m X_r s^{r-1}}{\sum_{r=1}^{2n} Y_r s^{r-1}} \quad \text{avec } 2n - m = 2$$

II.2.1.1. Calcul des valeurs propres :

Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples de la forme suivante :

$$\Gamma(s) = \frac{\sum_{r=1}^m X_r s^{r-1}}{n \prod_{v=1}^n (s-s_v)(s-\bar{s}_v)}$$

Pour calculer les valeurs propres, il suffit donc de chercher les racines du dénominateur.

II.2.1.2. Calcul des vecteurs propres :

$\Gamma(s)$ s'écrit d'après les relations (10) et (19) du chapitre I :

$$\Gamma(s) = \sum_{\sigma=1}^n \frac{A_{\sigma}}{s-s_{\sigma}} + \frac{\bar{A}_0}{s-\bar{s}_0}$$

$$\text{donc } \Gamma(s) (s-s_v) = A_v + \frac{\bar{A}_v (s-s_v)}{s-\bar{s}_v} + \left(\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \frac{A_{\sigma}}{s-s_{\sigma}} + \frac{\bar{A}_{\sigma}}{s-\bar{s}_{\sigma}} \right) (s-s_v) \quad (4)$$

$$\text{et } \Gamma(s) (s-s_v) = \frac{\sum_{r=1}^m X_r s^{r-1}}{(s-\bar{s}_v) \sum_{\substack{v=1 \\ \sigma \neq v}}^n (s-s_v)(s-\bar{s}_v)} \quad (5)$$

En égalant (4) et (5) pour $s = s_v$, il vient :

$$A_v = \frac{\sum_{r=1}^m X_r s_v^{r-1}}{(s-\bar{s}_v) \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n (s-s_{\sigma})(s-\bar{s}_{\sigma})}$$

a) cas β diagonale :

Soient j le point d'excitation, i le point réponse.

En identifiant les réponses (9) et (10) du chapitre I, il vient :

$$\frac{y_{vi}^* y_{vj}^*}{s^2 + s \beta_{vv} - s_v^{*2}} = \frac{A_{vij}^*}{s - s_v^*} + \frac{\bar{A}_{vij}^*}{s - \bar{s}_v^*}$$

En réduisant au même dénominateur et en tenant compte du fait que la différence de degré entre numérateur et dénominateur est 2, on a : $A_{vij}^* = -\bar{A}_{vij}^*$

$$y_{vi}^* y_{vj}^* = -A_{vij}^* \bar{s}_v^* - \bar{A}_{vij}^* s_v^* \quad (6)$$

$$y_{vj}^{*2} = -A_{vjj}^* (\bar{s}_v^* - s_v^*) = 2j \omega_v A_{vjj}^*$$

d'où y_{vj}^* .

puis y_{vi} de la relation (6).

b) cas β non diagonale :

$$\text{On a } \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{s - s_v} + \frac{\bar{A}_v}{s - \bar{s}_v} = \sum_{v=1}^n \frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v}$$

j étant le point d'excitation et i le point réponse :

$$\frac{A_{vij}}{s - s_v} = \frac{y_{vi} y_{vj}}{s - s_v}$$

$$\text{d'où } y_{vj}^2 = A_{vjj} \quad \text{et } y_{vj} = \sqrt{A_{vjj}}$$

$$\text{puis } y_{vi} = \frac{A_{vij}}{y_{vj}}$$

II.2.2. Nécessité du lissage :

Les valeurs expérimentales sont forcément entachées d'erreur (bruit, erreurs instrumentales,...) mais on peut effectuer un grand nombre d'expériences, et par la même, obtenir une solution qui approche au mieux les mesures expérimentales par une méthode de lissage.

Une méthode consiste à exploiter N mesures de réponses y à des intervalles de temps égaux et à chercher les vecteurs propres y et les pulsations propres s_v tels que la réponse calculée :

$$y = \sum_v c_v y_v e^{s_v t}$$

corresponde au mieux à la réponse mesurée [22-23] .

MIKUKCIK [24-26] propose une méthode qui demande une inversion de matrice à partir de réponses, qui peut être valable pour un système discret à faible nombre de degrés de liberté.

L'excitation harmonique donne de meilleurs résultats mais nécessite beaucoup plus de mesures.

THOREN [27] propose une méthode originale demandant un faible nombre de mesures sur la structure mais qui suppose connus les fréquences propres et les amortissements généralisés. L'excitation est faite en un seul point. On obtient directement les modes propres mesurés. Les autres méthodes [28 à 31] utilisent presque exclusivement la décomposition en fractions rationnelles des fonctions de transfert mesurées entre un point d'excitation et les points capteurs.

Dans la suite, nous allons développer une de ces méthodes proposée par DAT et MEURZEC [32] et montrer les problèmes numériques qui se posent.

Les méthodes actuelles utilisent des réponses à des excitations aléatoires, impulsionnelles (mesures de transitoires) ou sinusoïdales.

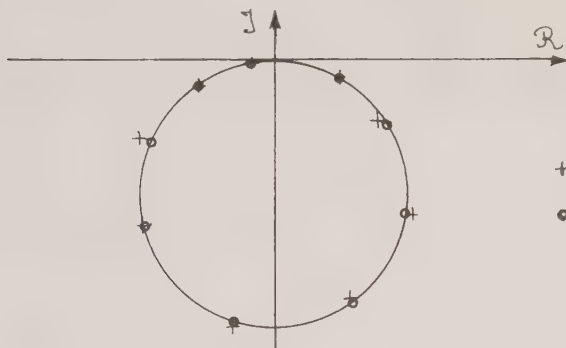
II.2.3. Méthode DAT et MEURZEC.

Soit une fonction de transfert $A(j\omega_k)$ écrite sous forme d'une fraction rationnelle à coefficients réels :

$$A(j\omega_k) = \frac{P(j\omega_k)}{Q(j\omega_k)} = \frac{\sum_{r=1}^m X_r (j\omega_k)^{r-1}}{\sum_{r=1}^n Y_r (j\omega_k)^{r-1}} \quad (9)$$

avec $n - m = 2$

Il s'agit de déterminer les coefficients X_r et Y_r qui rendent minimum, au sens d'une norme, la différence entre l'ensemble des valeurs expérimentales $A^*(j\omega_k)$ et celui des valeurs $A(j\omega_k)$ données par la formule (9) :



+ : $A^*(j\omega_k)$ valeur mesurée,
 • : $A(j\omega_k)$ valeur calculée.

Fig. 4

L'écart entre $A(j\omega_k)$ et $A^*(j\omega_k)$ est caractérisé par :

$$\epsilon(j\omega_k) = P(j\omega_k) - A^*(j\omega_k) Q(j\omega_k)$$

c'est-à-dire pour $k = 1, P$, en notant $A_k^* = A^*(j\omega_k)$, on a :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(j\omega_1) \\ \vdots \\ \varepsilon(j\omega_k) \\ \vdots \\ \varepsilon(j\omega_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & (j\omega_1)^{m-1} \\ 1 & \dots & (j\omega_2)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (j\omega_k)^{r-1} & (j\omega_k)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & (j\omega_p)^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_r \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1^* & j\omega_1 A_1^* & \dots & (j\omega_1)^{n-1} A_1^* \\ A_2^* & j\omega_2 A_2^* & \dots & (j\omega_2)^{n-1} A_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k^* & j\omega_k A_k^* & (j\omega_k)^{r-1} A_k^* & (j\omega_k)^{n-1} A_k^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p^* & j\omega_p A_p^* & \dots & (j\omega_p)^{n-1} A_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ce système est de la forme $\varepsilon = S X - T Y$, les matrices S et T sont de dimension $P \times m$ et $P \times n$.

Pour minimiser ε , nous allons minimiser le scalaire :

$$\delta = \frac{T_{\varepsilon\varepsilon}^-}{T_Y T_{\bar{T}} T Y} = \frac{N}{D} \quad \text{par rapport à } X \text{ et } Y.$$

Cherchons donc X et Y tel que $\frac{\partial \delta}{\partial X} = \frac{\partial \delta}{\partial Y} = 0$

$$\varepsilon = S X - T Y.$$

$$T_{\varepsilon\varepsilon}^- = (T_X T_{\bar{S}} - T_Y T_{\bar{T}}) (S X - T Y) = T_X T_{\bar{S}} S X - T_X T_{\bar{S}} T Y - T_Y T_{\bar{T}} S X + T_Y T_{\bar{T}} T Y$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial X} = \frac{[(T_{\bar{S}} S + T_{S\bar{S}}) X - (T_{\bar{S}} T + T_{S\bar{T}}) Y]}{D} = 0$$

$$\text{donc } (T_{\bar{S}} S + T_{S\bar{S}}) X - (T_{\bar{S}} T + T_{S\bar{T}}) Y = 0 \quad (11)$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} R_S = T_{\bar{S}} S + T_{S\bar{S}} = \bar{R}_S \\ R_{ST} = T_{\bar{S}} T + T_{S\bar{T}} = \bar{R}_{ST} \end{cases}$$

Les matrices R_S et R_{ST} sont réelles. (11) devient :

$$R_S X - R_{ST} Y = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{X = R_S^{-1} \cdot R_{ST} \cdot Y} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial Y} = \frac{D \left[- (T_{TS} + T_{T\bar{S}}) X + (T_{TT} + T_{T\bar{T}}) Y \right] - N (T_{TT} + T_{T\bar{T}}) Y}{D^2} = 0$$

$$\text{donc} \quad - (T_{TS} + T_{T\bar{S}}) X + (T_{TT} + T_{T\bar{T}}) Y - \delta (T_{TT} - T_{T\bar{T}}) Y = 0 \quad (13)$$

Posons $R_T = T_{TT} + T_{T\bar{T}} = T_{R_T}$ R_T est une matrice réelle

(13) devient :

$$- T_{R_{ST}} X + (1 - \delta) R_T Y = 0$$

En tenant compte de la relation (12), on obtient :

$$\boxed{\left[T_{R_{ST}} \cdot R_S^{-1} \cdot R_{ST} - (1 - \delta) R_T \right] Y = 0} \quad (14)$$

On recherche la plus grande valeur propre, elle correspond à δ le plus petit. Le vecteur propre correspondant est le vecteur des coefficients du dénominateur de $A(j\omega)$, la relation (12) donnent les coefficients du numérateur.

Cette méthode ne peut être appliquée brutalement sans prendre quelques précautions pour le calcul numérique. Ainsi, il est préférable de faire le calcul avec des matrices S et T réelles et d'autre part pour mieux conditionner les matrices, on se ramène à des fonctions de base orthogonale.

. Ecriture de S et T sous forme réelle :

Expliquons cette transformation en prenant par exemple S d'ordre $(p,3)$ et T d'ordre $(p,5)$.

Développons la première ligne du système (10), nous obtenons :

$$\varepsilon(j\omega_1) = X_0 + j\omega_1 X_1 + (j\omega_1)^2 X_2 - A_1^* [Y_0 + j\omega_1 Y_1 + (j\omega_1)^2 Y_2 + (j\omega_1)^3 Y_3 + (j\omega_1)^4 Y_4]$$

En posant : $A_1^* = \alpha_1 + j\beta_1$, il vient :

$$\varepsilon(j\omega_1) = X_0 + j\omega_1 X_1 + (j\omega_1)^2 X_2 - (\alpha_1 + j\beta_1) [Y_0 + j\omega_1 Y_1 + (j\omega_1)^2 Y_2 + (j\omega_1)^3 Y_3 + (j\omega_1)^4 Y_4]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(j\omega_1) = & X_0 + j\omega_1 X_1 - {}_1X_2 - (\alpha_1 Y_0 + j\omega_1 \alpha_1 Y_1 - \alpha_1 \omega_1^2 Y_2 - j\omega_1^3 \alpha_1 Y_3 + \alpha_1 \omega_1^4 Y_4 + j\beta_1 Y_0 \\ & - \beta_1 \omega_1 Y_1 - j\beta_1 \omega_1^2 Y_2 + \beta_1 \omega_1^3 Y_3 + j\beta_1 \omega_1^4 Y_4) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, en séparant les parties réelles et imaginaires, on peut écrire :

$\varepsilon(j\omega_1)$	1	0	$-\omega_1^2$	X_0	α_1	$-\beta_1 \omega_1$	$-\alpha_1 \omega_1^2$	$\beta_1 \omega_1^3$	$\alpha_1 \omega_1^4$	Y_0
	0	ω_1	0		β_1	$\alpha_1 \omega_1$	$-\beta_1 \omega_1^2$	$-\alpha_1 \omega_1^3$	$\beta_1 \omega_1^4$	Y_1
	1	0	$-\omega_2^2$		α_2	$-\beta_2 \omega_2$	$-\alpha_2 \omega_2^2$	$\beta_2 \omega_2^3$	$\alpha_2 \omega_2^4$	Y_2
	0	ω_2	0		β_2	$\alpha_2 \omega_2$	$-\beta_2 \omega_2^2$	$-\alpha_2 \omega_2^3$	$\beta_2 \omega_2^4$	Y_3
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\varepsilon(j\omega_p)$	1	0	$-\omega_p^2$	X_2	α_p	$-\beta_p \omega_p$	$-\alpha_p \omega_p^2$	$\beta_p \omega_p^3$	$\alpha_p \omega_p^4$	Y_4
	0	ω_p	0		β_p	$\alpha_p \omega_p$	$-\beta_p \omega_p^2$	$-\alpha_p \omega_p^3$	$\beta_p \omega_p^4$	

Ainsi, les matrices S et T sont réelles, d'ordre $(2p, m)$ et $(2p, n)$.
 Pour mieux les conditionner, nous diviserons la $j^{\text{ème}}$ colonne par ω_0^{j-1} ,
 $j = 2$ à m ou n , ω_0 étant la valeur moyenne des pulsations.

Nous remarquons que les colonnes se déduisent les unes des autres par la relation :

$$j > 2 \begin{cases} S_{ij} = S_{i,j-2} \cdot (-\omega_k)^2 \\ T_{ij} = T_{i,j-2} \cdot (-\omega_k)^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} k = \frac{i+1}{2} \text{ pour } i \text{ impair} \\ k = i/2 \text{ pour } i \text{ pair} \end{matrix}$$

ce qui permet de construire assez facilement les matrices S et T à partir des 2 premières colonnes.

. Orthogonalisation des matrices.

Les colonnes de la matrice S peuvent être considérées comme un ensemble de vecteurs. Il existe donc une matrice de changement de base A triangulaire, de rang m telle que :

$$S = Q \cdot A \quad \text{où les vecteurs de Q sont orthogonaux, c'est-à-dire } {}^T_Q Q = E.$$

De même pour T :

$$T = R \cdot B \quad \text{avec } {}^T_R R = E$$

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ P2xm \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{} \\ P2xm \end{array} \begin{array}{c} \boxed{} \\ mxm \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \boxed{} \\ P2xn \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{} \\ P2xn \end{array} \begin{array}{c} \boxed{} \\ nxn \end{array}$$

$$P2=2 \times P$$

$$S = Q \cdot A ; \quad T = R \cdot B$$

En remplaçant S et T par leurs valeurs dans les expressions (11) de R_S et R_{ST} , on a :

$$R_S = 2 {}^T_A {}^T_Q Q A = 2 {}^T_A A \quad \text{puisque } {}^T_Q Q = E$$

$$R_{ST} = 2 {}^T_A {}^T_Q R B$$

d'où (12) devient :

$$X = R_S^{-1} R_{ST} Y = (T_A A)^{-1} T_A T_Q R B Y = A^{-1} T_Q R B Y \quad (15)$$

et l'équation (14) est :

$$2 [T_B T_R Q A A^{-1} T_Q R B - (1 - \delta) T_B B] Y = 0$$

avec $R_T = 2 T_B T_R R B = 2 T_B B$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{[T_R Q T_Q R - (1 - \delta) E] B Y = 0} \quad (16)$$

II.2.4. Problèmes numériques

Les matrices ne sont pas encore suffisamment bien conditionnées. La résolution du problème aux valeurs propres pose des problèmes numériques et ne donne pas de solution satisfaisante dès l'instant où l'on veut traiter simultanément plusieurs modes. De plus, se pose le problème toujours délicat du choix du degré du numérateur. Ces remarques nous ont fait abandonner cette technique au profit de la méthode que nous développons dans le chapitre III.

CHAPITRE III

PROPOSITION D'UNE NOUVELLE METHODE

III.1. Forme analytique des fonctions de transfert utilisée : justification :

On a vu que la réponse se mettait sous la forme :

$$y_i = \left[\sum_v \frac{y_{vi} \cdot T_{y_v}}{s - s_v} + \frac{\bar{y}_{vi} \cdot T_{\bar{y}_v}}{s - \bar{s}_v} \right] f \quad (1)$$

avec $s - s_v = j\omega + a_v \omega_v - j\omega_v$ et $s - \bar{s}_v = j\omega + a_v \omega_v + j\omega_v$

Nous allons donner une expression plus simple de cette réponse forcée à partir des remarques suivantes :

- * $y_{vi} \cdot T_{y_v} f = t_{vi}$ est une constante complexe si les forces d'excitation sont indépendantes de la pulsation d'excitation.
- * Les termes provenant de la deuxième somme peuvent être considérés comme constants dans la bande de fréquence utilisée : ω voisin de ω_v .
- * Nous allons montrer que les termes de la première somme dont la pulsation propre est éloignée de la pulsation d'excitation ($\frac{\omega}{\omega_v} \ll 1$ ou $\frac{\omega_v}{\omega} \ll 1$) peuvent s'écrire sous la forme d'un terme constant et d'un terme linéaire en ω .

1) Cas $\frac{\omega}{\omega_v} \ll 1$:

$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{1}{j\omega + a_v \omega_v - j\omega_v} = \frac{1}{j\omega_v \left| -1 - ja_v + \frac{\omega}{\omega_v} \right|} = \frac{-1 + \frac{\omega}{\omega_v} + ja_v}{j\omega_v \left| \left(-1 + \frac{\omega}{\omega_v} \right)^2 + a_v^2 \right|}$$

or : $a_v \ll 1$, développons au 1er ordre :

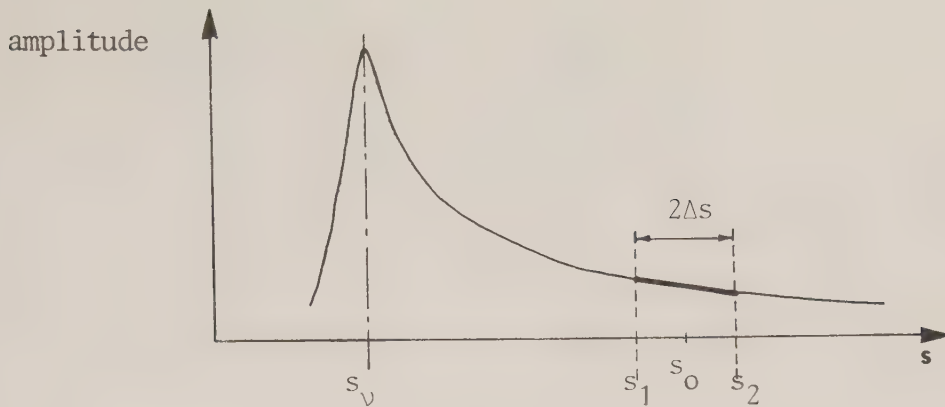
$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{-1 + \frac{\omega}{\omega_v} + ja_v}{j\omega_v \left| \left(1 - 2\frac{\omega}{\omega_v} + \varepsilon(\omega^2) \right) \right|}$$

$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{1}{j\omega_v} \left| -1 + \frac{\omega}{\omega_v} + ja_v \right| \left| 1 + 2\frac{\omega}{\omega_v} + \varepsilon(\omega^2) \right| = \frac{1}{j\omega_v} \left| -1 + \frac{\omega}{\omega_v} + ja_v - 2\frac{\omega}{\omega_v} \right| + \varepsilon(\omega^2)$$

$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{1}{j\omega_v} \left| -1 + ja_v - \frac{\omega}{\omega_v} + \varepsilon(\omega^2) \right| = \frac{-1 + ja_v}{j\omega_v} + j \frac{\omega}{\omega_v^2} + \varepsilon(\omega^2)$$

L'expression obtenue est la somme d'un terme constant et d'un terme linéaire en s .

2) cas $\frac{\omega}{\omega_v} \gg 1$:



Calculons la pente de la courbe à $s_1 = s_0 - \Delta s$ et $s_2 = s_0 + \Delta s$ avec $|s_0| \gg |s_v|$ et $|\Delta s| \ll |s_0 - s_v|$.

$$\Delta P = P(s_1) - P(s_2) = \frac{1}{(s_1 - s_v)^2} - \frac{1}{(s_2 - s_v)^2} = \frac{(s_2 - s_v)^2 - (s_1 - s_v)^2}{(s_1 - s_v)^2 (s_2 - s_v)^2}$$

$$\Delta P = \frac{(s_1 + s_2 - 2s_v)(s_2 - s_1)}{(s_1 - s_v)^2 (s_2 - s_v)^2} \approx \frac{2(s_0 - s_v)(2\Delta s)}{[(s_0 - s_v - \Delta s)(s_0 - s_v + \Delta s)]^2}$$

$$\Delta P = \frac{4\Delta s (s_0 - s_v)}{[(s_0 - s_v)^2 - \Delta s^2]^2} \approx \frac{4\Delta s}{(s_0 - s_v)^3} \quad \text{avec } |\Delta s| \ll |s_0 - s_v|$$

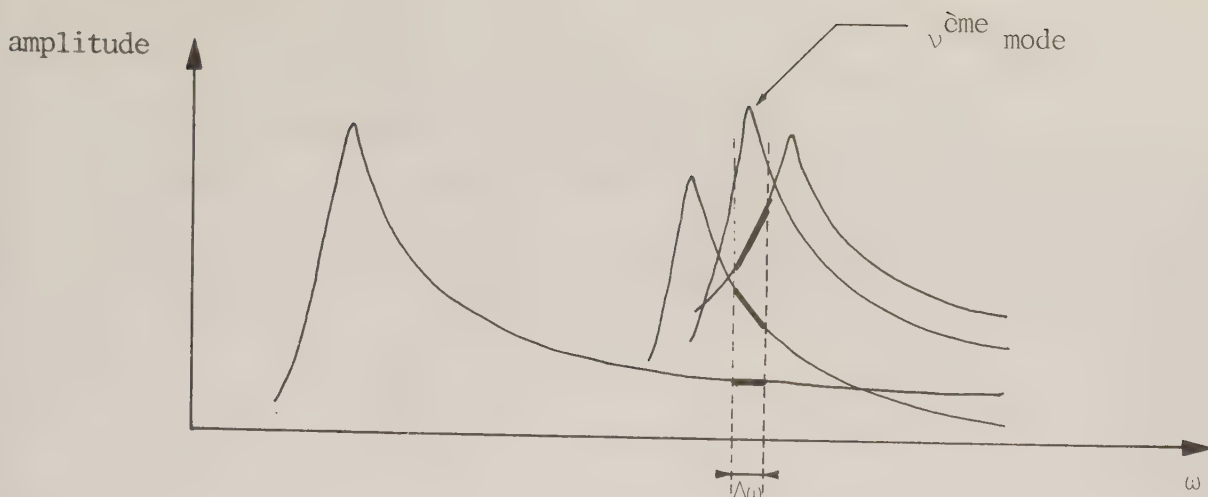
Nous pouvons donc considérer que la pente entre s_1 et s_2 est pratiquement constante dans l'intervalle $2\Delta s$ et assimiler cette portion de courbe à une droite.

La contribution de tels modes se traduit donc aussi par un terme linéaire en ω et un terme constant.

D'où nous pouvons écrire la réponse forcée sous la forme simplifiée suivante :

$$y_i = u_i + s v_i + \sum_{v=1}^n \frac{t_{vi}}{s - s_v} \quad \text{pour } n \text{ modes très proches}$$

$u_i + s v_i$ représentant la contribution des modes "oubliés".



II.2. Technique numérique de lissage :

On dispose généralement d'un grand nombre de mesures au voisinage de chaque fréquence propre. Soit P le nombre de fréquences d'excitation, on peut écrire pour k variant de 1 à P :

$$y_i(\omega_k) = u_i + s v_i + \sum_{v=1}^n \frac{t_{vi}}{j\omega_k - s_v}$$

Nous disposons de P équations pour déterminer les $(2n+2)$ constantes u_i , v_i , t_{vi} ($v=1,n$), s_v ($v=1,n$). Ce système est un système non linéaire, surdimensionné de P équations à $(2n+2)$ inconnues complexes. La résolution peut être effectuée en utilisant une méthode de gradient associée à une méthode de moindres carrées.

Pour cela, définissons la fonction :

$$f(u_i, v_i, t_{vi}, s_v, \omega_k) = y_i(\omega_k) - u_i - s v_i - \sum_{v=1}^n \frac{t_{vi}}{j\omega_k - s_v} = 0 \quad (3)$$

On peut effectuer un développement au premier ordre de cette fonction au voisinage de valeurs initiales des paramètres sous la forme :

$$f(u_i, v_i, t_{vi}, s_v, \omega_k) = f(u_0, v_0, t_{v0}, s_{v0}, \omega_k) + \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial f}{\partial v_i} dv_i + \sum_{v=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_{vi}} dt_{vi} + \sum_{v=1}^n \frac{\partial f}{\partial s_v} ds_v \quad (4)$$

Cette relation est vérifiée pour chaque pulsation $\omega_k, k = 1 \text{ à } P$.
On obtient donc sous forme matricielle :

(5)

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u} \omega=\omega_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v} \omega=\omega_p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_{1i}} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_{1i}} \omega=\omega_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_{2i}} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_{2i}} \omega=\omega_p \end{pmatrix} \quad \dots$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s_1} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial s_1} \omega=\omega_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s_2} \omega=\omega_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial s_2} \omega=\omega_p \end{pmatrix} \quad \dots$	$\begin{pmatrix} du_i \\ dv_i \\ dt_1 \\ dt_2 \\ ds_1 \\ ds_2 \end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix} f(u_i, v_i, t_{vio}, s_{vo}, \omega_1) \\ \vdots \\ f(u_i, v_i, t_{vio}, s_{vo}, \omega_p) \end{pmatrix}$
$\underbrace{\hspace{10em}}_2$	$\underbrace{\hspace{10em}}_n$	$\underbrace{\hspace{10em}}_n$		

Ce problème linéarisé est de la forme $A dX = F$ (6)
 dX peut être calculé de manière à minimiser le scalaire $T_{\epsilon}^{-1} \epsilon$. On obtient ainsi par la pseudo inverse complexe

$$dX = (T_{\bar{A}} A)^{-1} \cdot T_{\bar{A}} F \quad (7).$$

Pour cela, on donne le vecteur des valeurs initiales $X_0 = (u_0, v_0, t_{vio}, s_{vo})$ ($v = 1, n$) et l'on calcule dX par l'équation (7). On réitère le procédé en calculant $(dX + X_0)$ dans $A (dX + X_0) = F$. Les valeurs successivement obtenues convergent vers le vecteur solution du système d'équation (6). L'itération est arrêtée lorsque la précision voulue est obtenue.

Les essais effectués sur des cas industriels nous ont permis de faire les 2 constatations suivantes :

1- Pour le calcul de 1 ou 2 modes, il suffit d'initialiser u_{io}, v_{io}, t_{vio} à zéro et de donner à s_{vo} la valeur $j\omega_v'$ relevée sur la réponse forcée pour que le processus converge.



2- Pour un même mode, suivant le point dépouillé, on constate de légères fluctuations sur s_v , alors que dans la théorie des systèmes linéaires, on devrait avoir le même s_v pour tous les points. De plus, dans le cas où un capteur se trouve au voisinage d'un noeud, on peut obtenir un nuage incohérent de points et par conséquent des valeurs tout à fait erronées pour s_v et t_v .

Pour y remédier, le lissage des fonctions de transfert va s'effectuer en 2 étapes :

a- Pour chaque point capteur, on calcule u_i , v_i , t_{vi} , s_v . A partir de ces valeurs, on peut recalculer les déplacements forcés et tracer les lieux de Nyquist. Cela permet de se rendre compte si les résultats obtenus sont corrects ou non et de ne retenir que les résultats pour lesquels la cohérence entre déplacements forcés calculés et mesurés est bonne. On détermine alors la pulsation propre s_v comme étant la valeur moyenne des résultats obtenus.

b- On effectue un deuxième passage en imposant la valeur s_v calculée au premier passage. On ne détermine plus que u_i , v_i et t_{vi} , $v = 1$ à n .

Ce procédé permet ainsi d'avoir la même valeur s_v sur tous les points et surtout évite les aberrations lorsque le niveau sur un point capteur est noyé dans le bruit. L'avantage de la méthode apparaît sur fig. 6 et 7 p 48 et 49.

III.3. Calcul d'un vecteur propre :

III.3.1. Excitation monopoint :

Dans le cas d'une excitation monopoint, le calcul du vecteur propre ne présente aucune difficulté. Soit i le point où est mesuré le déplacement, j le point où est appliquée la force. On a :

$$y_i = u_i + s v_i + \sum_v \frac{y_{vi} \cdot y_{vj}}{s - s_v} f_j$$

t_{vi} représente donc le scalaire $y_{vi} \cdot y_{vj} f_j$. Dans la pratique, f_j est normée à 1. On a donc :

FIG. 6 PASSAGE 1

10 FREQUENCES DE 67.59 HZ A 69.39 HZ

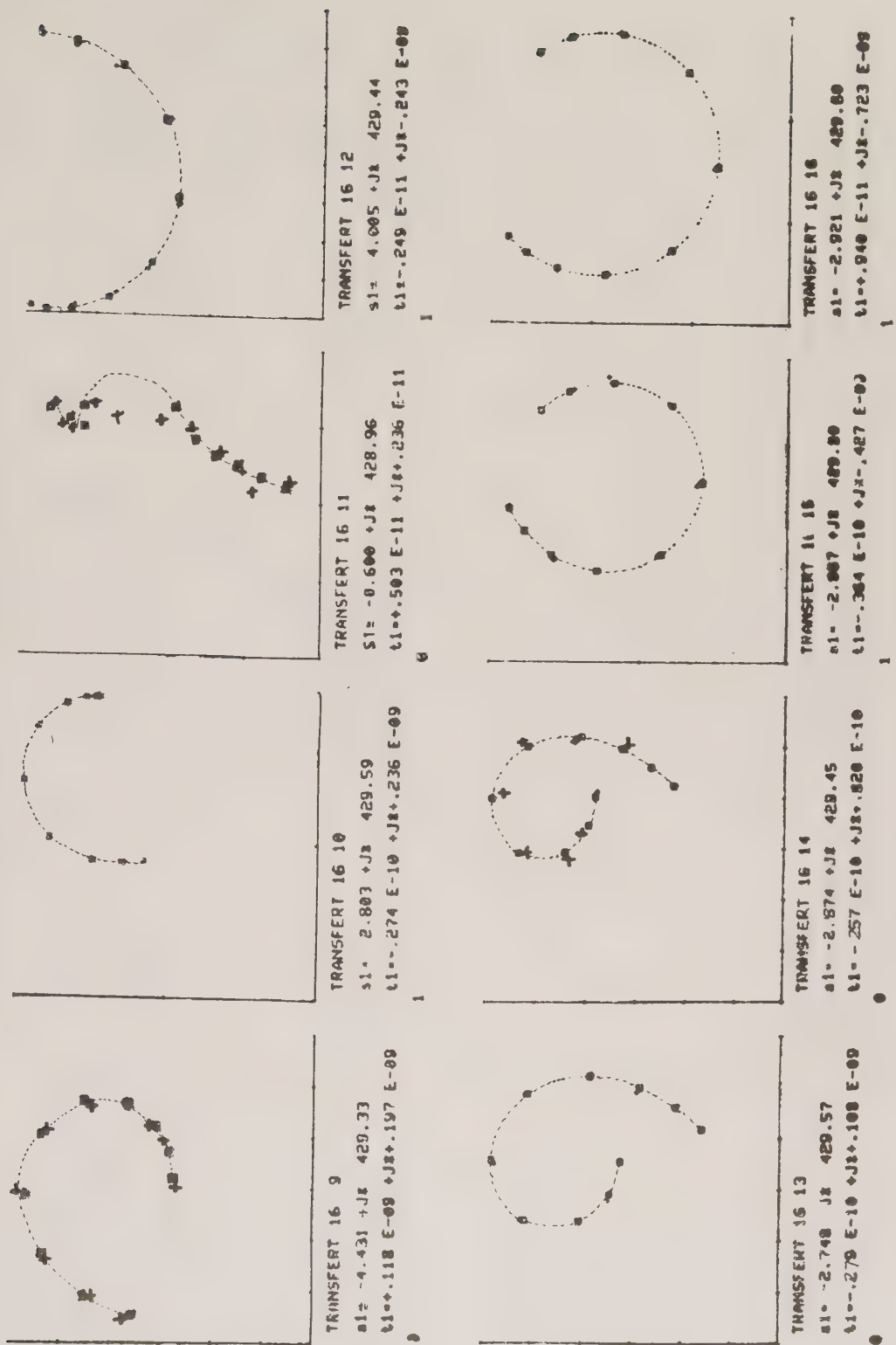
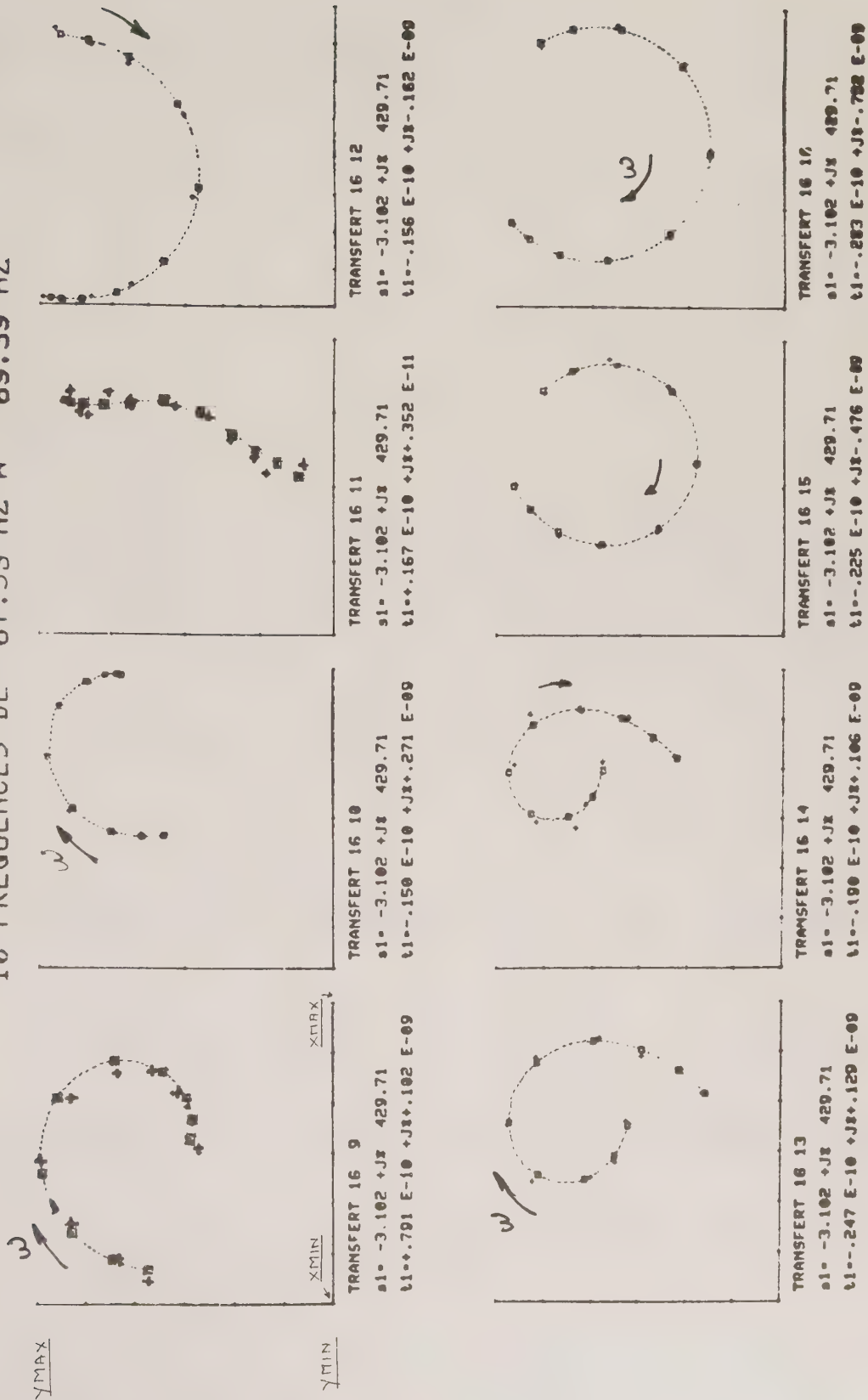


FIG. 7 PASSAGE 2

10 FREQUENCES DE 67.59 HZ A 69.39 HZ



$$t_{vij} = y_{vi} \cdot y_{vj} = t_{vj}$$

Le lissage des fonctions de transfert s'effectuant sur les M points capteurs, on dispose des quantités :

$$\begin{bmatrix} y_{v1} & y_{vj} \\ y_{v2} & y_{vj} \\ \vdots & \vdots \\ y_{vj}^2 & \\ \vdots & \vdots \\ y_{vM} & y_{vj} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur propre, il suffit donc de diviser chaque t_{vij} par $\sqrt{t_{vjj}}$ soit :

$$y_v = \begin{bmatrix} \vdots \\ t_{vij} / \sqrt{t_{vjj}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

III.3.2. Excitation multipoint :

Le problème est plus complexe. En effet, le vecteur réponse s'écrit alors :

$$y = u + s v + \sum_v \frac{y_v^T y_v}{s - s_v} f$$

Le lissage de la fonction de transfert du point i fournit le scalaire $t_{vi} = y_{vi}^T y_v f$

Il faut extraire les y_v à partir des M valeurs t_{vi} , sachant que f est connu et constant sur un lieu de Nyquist.

$$\text{Posons } c_v = y_v^T \cdot f$$

$$y - u - s v = \sum_v \frac{y_v c_v}{s - s_v}$$

$$T_f (y - u - s v) = \sum_v \frac{c_v^2}{s - s_v}$$

Cette relation est valable quelque soit s , en particulier pour $s = j\omega_v$.
On peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega_1 - s_1} & \frac{1}{j\omega_1 - s_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{j\omega_n - s_1} & \frac{1}{j\omega_n - s_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^2 \\ \vdots \\ c_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_f(y - u - s v)_{\omega=\omega_1} \\ \vdots \\ T_f(y - u - s v)_{\omega=\omega_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_f \sum_v \frac{t_v}{j\omega_1 - s_v} \\ \vdots \\ T_f \sum_v \frac{t_v}{j\omega_n - s_v} \end{bmatrix}$$

D'où en résolvant ce système linéaire, on obtient c_v^2 , $v = 1$ à n

et $y_v = \frac{1}{\sqrt{c_v}} \begin{bmatrix} t_{v1} \\ t_{v2} \\ \vdots \\ t_{vM} \end{bmatrix}$

III.4. Analyse des essais :

Pour tester cette nouvelle méthode d'identification, nous avons fait des mesures sur une maquette ayant des fréquences propres proches. Si l'on veut tester valablement l'efficacité de cette méthode, il faut effectuer des mesures aussi précises que possible et le matériel que l'on utilise a une grande importance. Nous avons décrit en annexe l'organisation générale des essais de vibration c'est-à-dire le mode d'excitation adopté et le matériel utilisé pour la mesure de grandeurs physiques.

Maintenant, nous allons montrer comment nous avons dépouillé ces mesures et appliqué la nouvelle méthode d'identification à l'aide de deux programmes, REPONSE et LISSAGE.

La démarche logique pour analyser les mesures comporte 3 étapes :

1. Tracé de la réponse forcée en amplitude et phase sur tous les points pour localiser les fréquences propres.
2. Tracé et lissage des lieux de Nyquist sur tous les points capteurs, calcul des éléments propres.
3. A partir des valeurs et vecteurs propres identifiés, calcul de la réponse forcée sur tous les points capteurs, de manière à vérifier que la réponse forcée est bien identique à celle mesurée.

Pour juger de la qualité de l'identification, le procédé le plus simple consiste à superposer les réponses mesurées et calculées. Les points n° 1 et 3 ont donc été regroupés dans le même programme REPONSE. Le point n° 2 est traité par le programme LISSAGE.

Le déroulement d'un essai s'effectue de la manière suivante :

1. Passage de REPONSE pour tracer les réponses forcées mesurées. L'échelle des fréquences peut être dilatée pour faire apparaître des détails de la réponse forcée.
2. Passage de LISSAGE pour lisser les fonctions de transfert et calculer les modes propres. Le programme est passé autant de fois qu'il y a de modes ou groupe de modes à identifier.
3. Passage de REPONSE pour tracer les réponses forcées calculées à partir des paramètres identifiés.

Eventuellement, on peut superposer les réponses mesurées et calculées.

REPONSE faisant appel à des résultats de LISSAGE, nous commençons par expliquer ce dernier programme.

III.4.1. Lissage des fonctions de transfert : programme "LISSAGE" :

Le programme "LISSAGE" a été rédigé de manière conversationnelle, les grandeurs d'entrée susceptibles de varier sont introduites à la console et l'opérateur au vu de la qualité du lissage décide des résultats à prendre en compte pour le calcul de la valeur propre moyenne : s_v moyen.

Le programme utilisant des données sur disque, nous allons en premier lieu examiner la structure des fichiers.

III.4.1.1. Structure du fichier d'entrée U : 1.

Pour gagner du temps et éviter de trop nombreux transferts disque, les réponses en fréquence ont été regroupées par capteur à raison d'un enregistrement par capteur. La structure du fichier est la suivante :

enregistrement n° 1	JK		nombre de fréquences mesurées
	F1		valeur de la 1ère fréquence (Hz)
	F2		valeur de la 2ème fréquence (Hz)
enregistrement n° 2 capteur n° 1			réponse en accélération complexe pour F = F1
	R(Γ_1)	I(Γ_1)	réponse en accélération complexe pour F = F2
	R(Γ_2)	I(Γ_2)	
enregistrement n° i + 1 capteur n° i (capteur de force)			force complexe pour F = F1
	R(f_1)	I(f_1)	force complexe pour F = F2
	R(f_2)	I(f_2)	

On voit qu'il faut $NCAP + 1$ enregistrements si l'on a $NCAP$ capteurs. Chaque enregistrement devra avoir une longueur égale à $8 * JK$ octets si JK est le nombre de fréquences d'excitation.

Lorsque l'on désire extraire la réponse en fréquence du capteur i , il suffit de lire les enregistrements 1 et $i + 1$, ce qui est extrêmement rapide. Ce mode de rangement permet d'augmenter considérablement la rapidité d'exécution du programme de tracé des réponses.

III.4.1.2. Organisation générale du programme.

Le programme permet de lisser des fonctions de transfert à une ou deux boucles. Le lissage est effectué en deux passes comme il a été dit en III.2. A la fin du deuxième passage, le ou les fréquences propres s_v et modes propres γ_v sont stockés sur disque alors que s_v et γ_v sont imprimés.

On donne fig. 8 p 55 l'organigramme général de "LISSAGE" ainsi que les organigrammes détaillés, fig. 8A, 8B, 8C. p 56, 57 et 58.

La console ne permettant de visualiser simultanément que 8 lieux de Nyquist, les fonctions de transfert sont traités par groupe de 8.

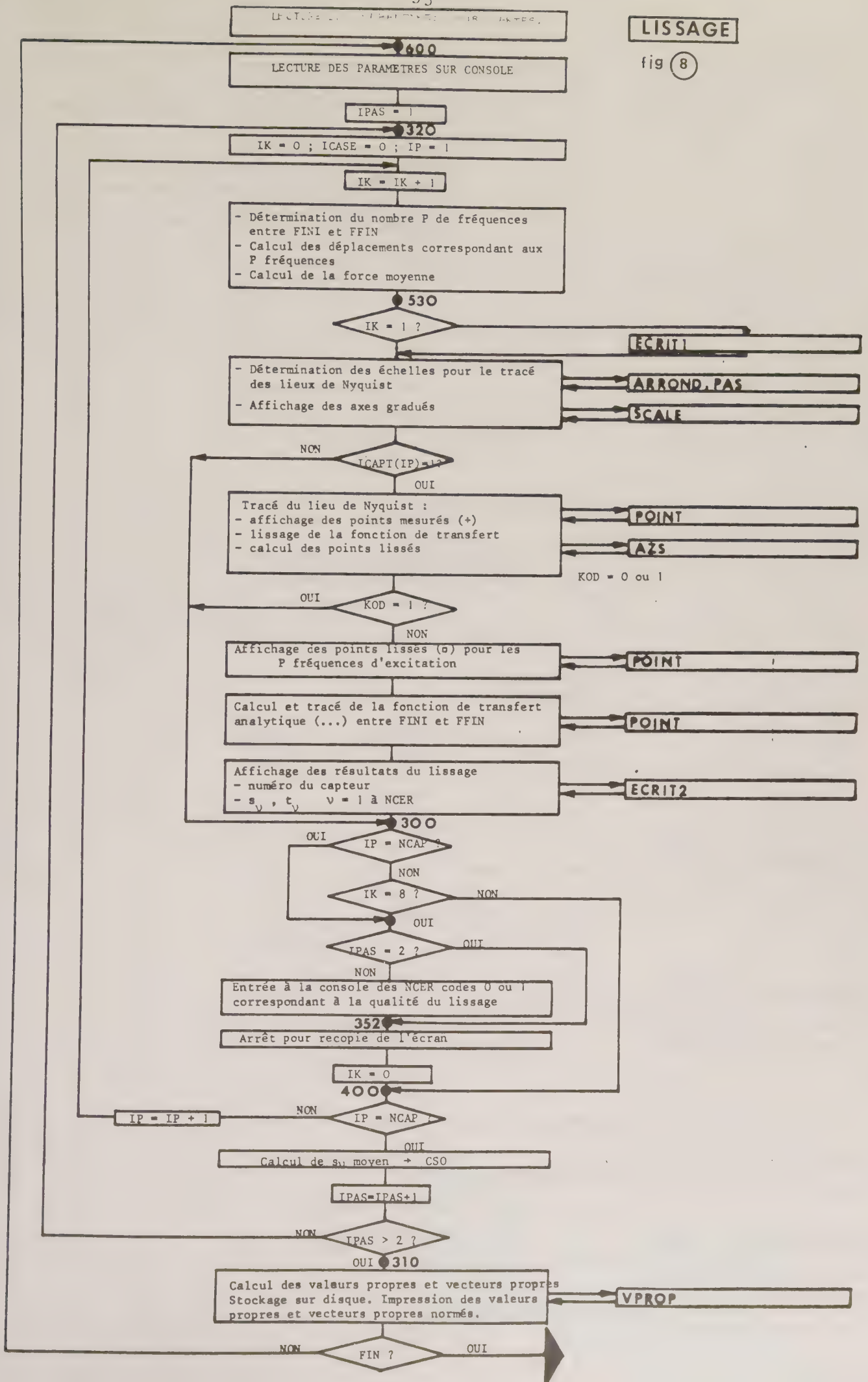
L'organigramme fig. 8 donne les différentes étapes du calcul ainsi que la liste des différents sous-programmes appelés.

Pour chaque capteur IP, on lit dans U : 1 les JK fréquences excitatrices rangées sous forme complexe dans CS. On sélectionne ensuite P fréquences appartenant à l'intervalle FINI et FFIN et on calcule le déplacement du point IP sur chacune de ces P fréquences, en divisant par $-\omega^2$. Les parties réelles et imaginaires de la réponse sont rangées respectivement dans les vecteurs X et Y.

Bien que les essais soient effectués en asservissant la phase et l'amplitude des excitateurs par rapport à un excitateur de référence, on a toujours des fluctuations de force au voisinage de la fréquence de résonance. La force CF qui sera prise en compte dans le calcul du vecteur propre est déterminée en effectuant la moyenne des forces appliquées aux P fréquences d'excitation.

LISSAGE

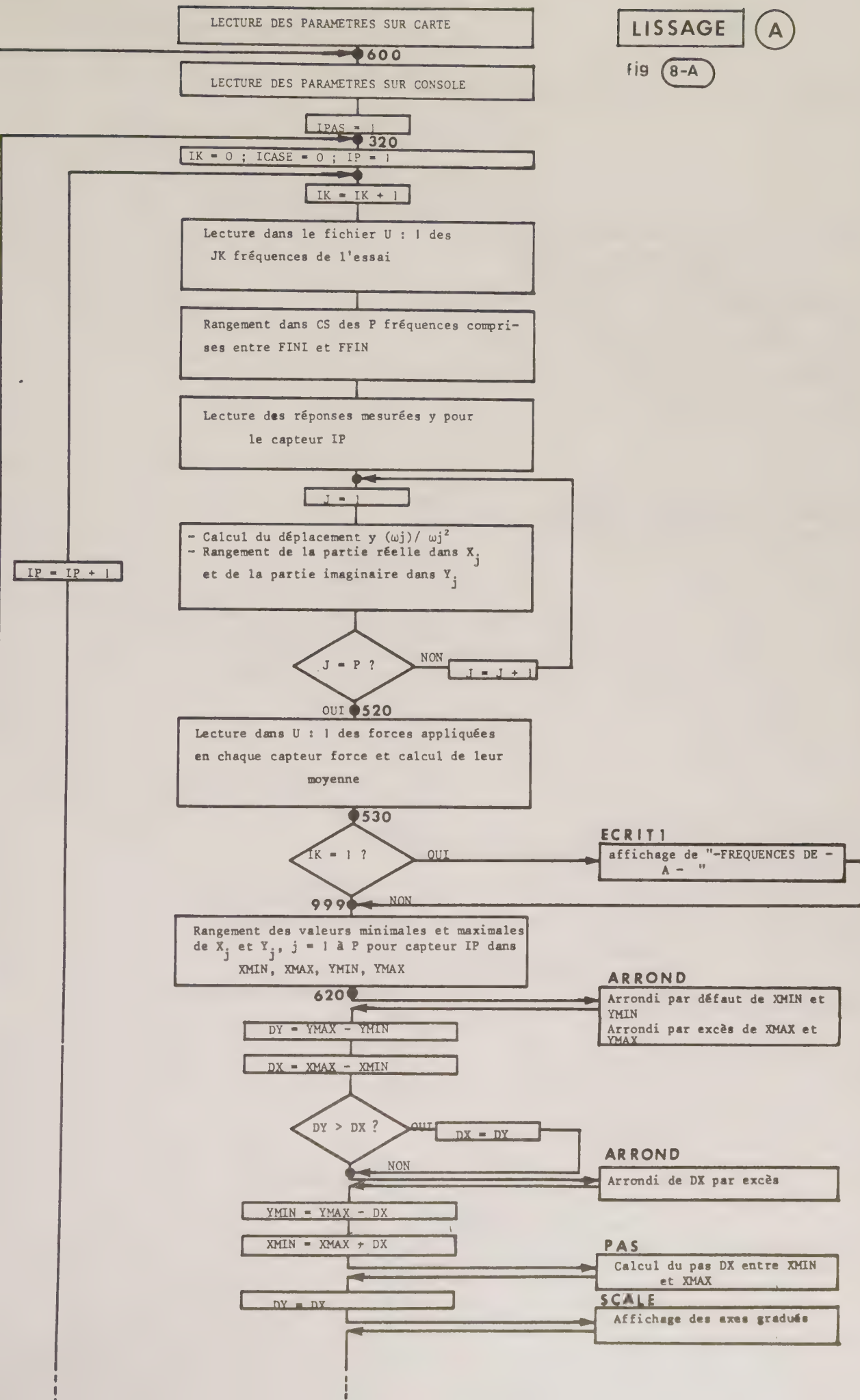
fig 8



LISSAGE

A

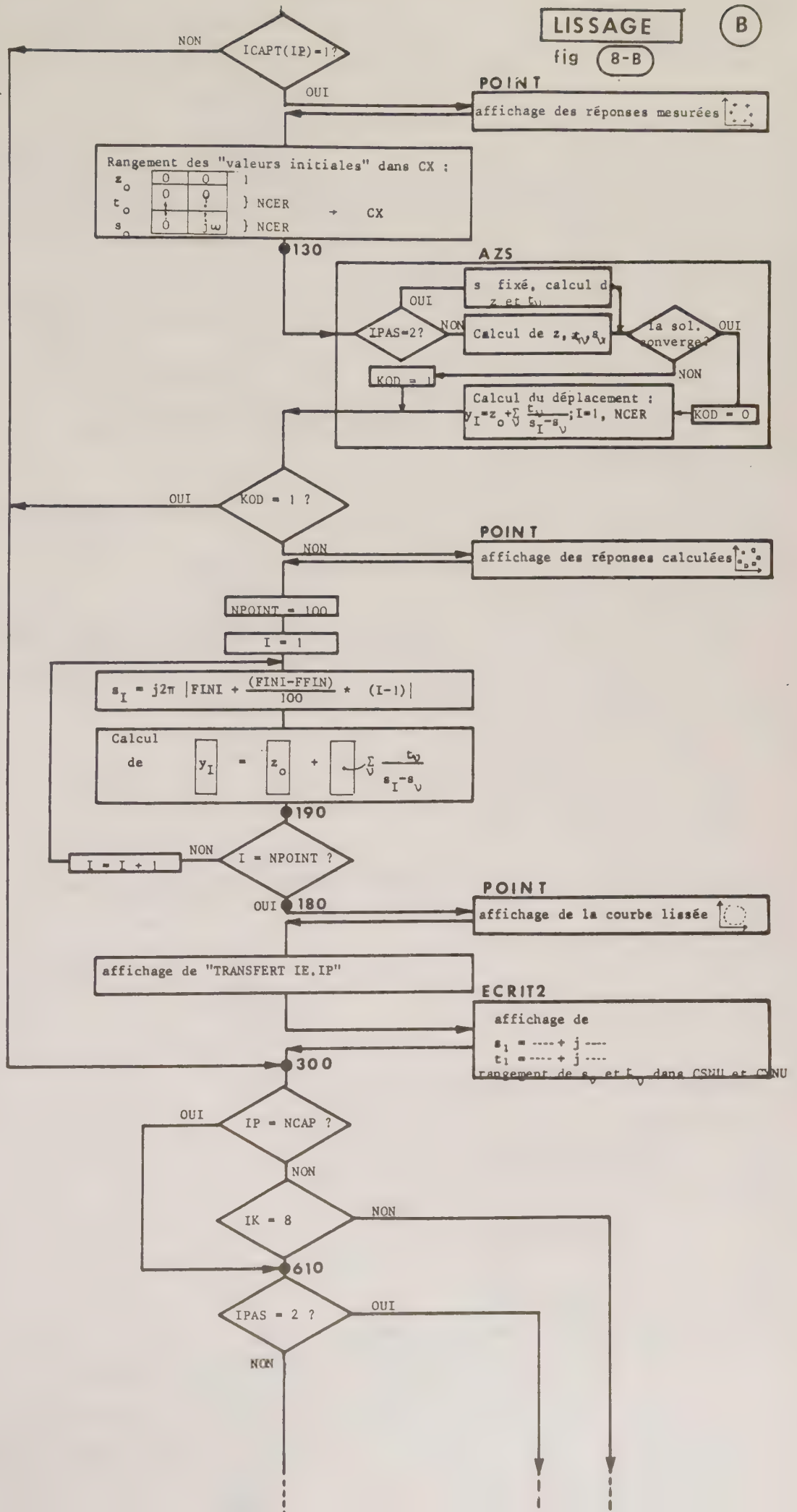
fig 8-A



LISSAGE

B

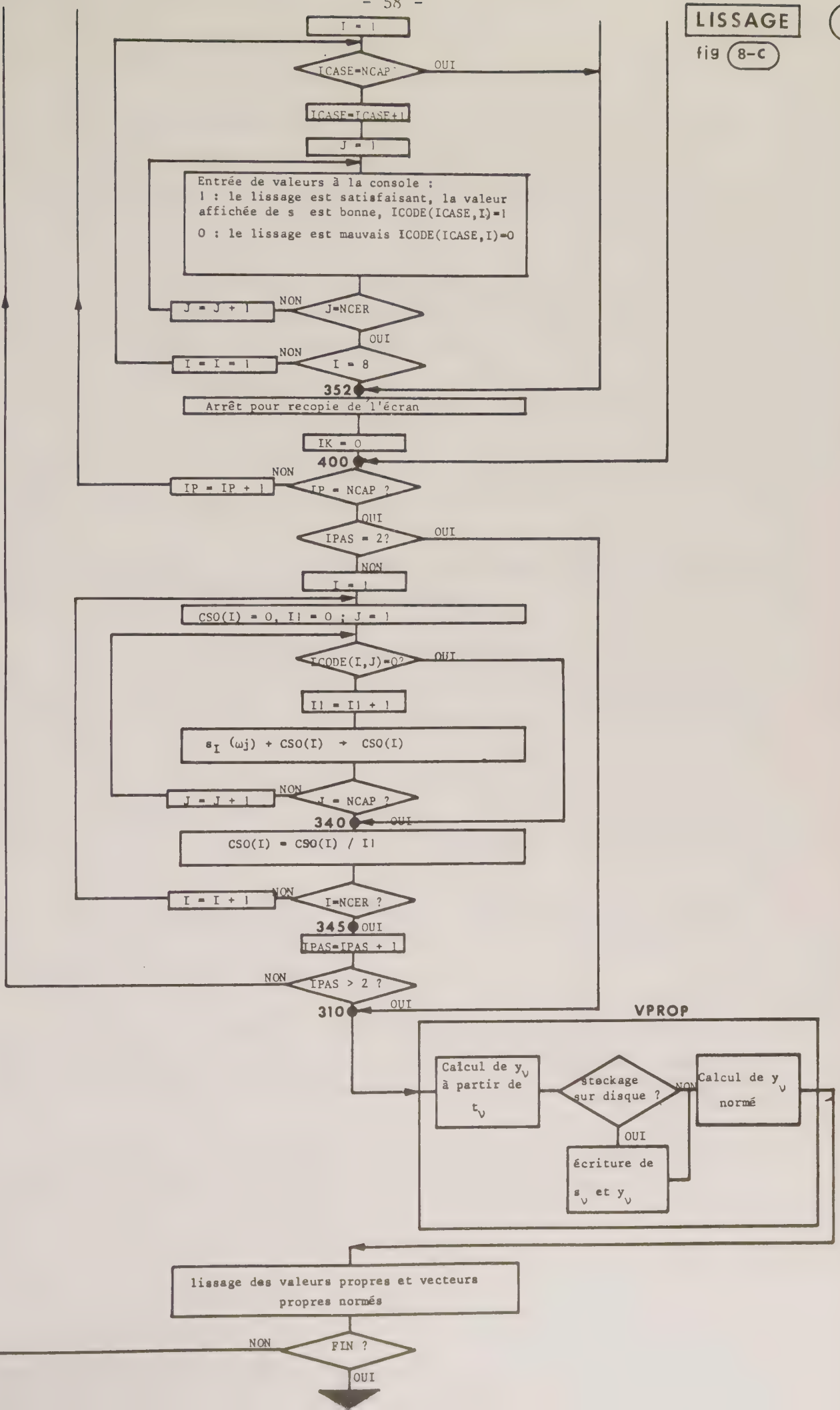
fig 8-B



600 320

0

320



Les lieux de Nyquist sont affichés dans 8 fenêtres. Les échelles ainsi que les coordonnées dans lesquelles doit s'effectuer le tracé sont déterminées automatiquement de manière à ce que les lieux soient cadrés dans les fenêtres.

Les échelles doivent être identiques en x et y. Pour cela, on détermine pour chaque lieu XMIN, YMIN, XMAX, YMAX, ces valeurs sont arrondies respectivement par valeurs inférieures et supérieures dans le sous-programme ARROND. On impose alors pour x et y l'intervalle sup. | (XMAX - XMIN), (YMAX - YMIN) | . Le sous-programme PAS permet de tracer les axes X et Y du lieu de Nyquist et de les graduer. Il faut noter que l'intersection de X et Y n'est pas le point (0,0) mais le point (XMIN, YMIN) de manière à ce que le lieu reste cadré (fig. 6).

Un test permet ensuite de sauter les lieux que l'on ne désire pas traiter (cas des capteurs de forces par exemple).

Pour les points capteurs analysés, on affiche les réponses mesurées (+) puis on procède au lissage de la fonction de transfert à l'aide du sous-programme AZS. AZS travaille de manière itérative et calcule le vecteur $^T \left[u_i, v_i (t_{vi}, v = 1, n) ; (s_v, v = 1, n) \right]$. On doit donner au sous-programme une valeur estimée initiale CX de ce vecteur. Dans la pratique, il suffit de prendre $u_i = v_i = 0, (t_{vi} = 0, v = 1, n)$ et d'initialiser s_v avec les valeurs des fréquences introduites à la console.

Dans le cas où le calcul itératif ne converge pas, on positionne l'indicateur KOD à 1 ce qui permet en sortie du sous-programme de passer directement au capteur suivant.

De plus, pour chaque fréquence d'excitation, AZS calcule les réponses obtenues à l'aide des valeurs u_i, v_i, t_{vi} et s_v identifiées. Ces P valeurs sont rangées dans le vecteur CA.

En sortie du sous-programme, on range les parties réelles et imaginaires de CA dans les vecteurs X et Y, de manière à afficher des réponses calculées ($\square$) à l'aide de POINT.

De plus, la fonction de transfert analytique est calculée et tracée en prenant 100 points de fréquence répartis uniformément entre FINI et FFIN. La courbe est affichée en pointillé (---) par l'intermédiaire du sous-programme POINT.

Pour chaque fonction de transfert, les résultats du lissage sont affichés sous forme de nombres complexes dans l'ordre $(s_v, v=1, n)$, $(t_v, v=1, n)$. Cet affichage est effectué par le sous-programme ECRIT 2.

On passe alors au capteur suivant sauf dans le cas où les 8 fenêtres de l'écran sont pleines ou lorsque le dernier capteur vient d'être traité. Il faut alors introduire à la console pour chaque fonction de transfert et pour chaque pulsation complexe identifiée un code 0 ou 1 suivant que l'on juge que le lissage est correct ou non.

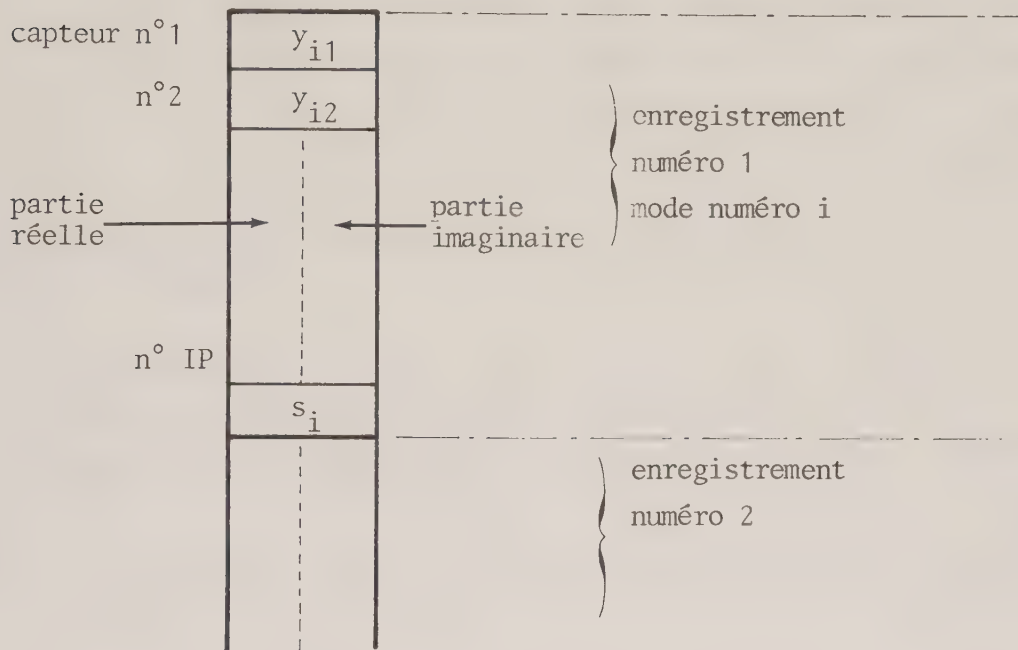
Chaque fois que la valeur 1 est entrée, la valeur correspondante de s_v est prise en compte pour le calcul de s_v moyen. Ces valeurs de code sont stockées dans la matrice ICODE.

Dans le cas où il reste des capteurs à traiter, on remet IK à 0 et on continue le traitement.

Lorsque tous les capteurs ont été traités, on calcule la valeur de s_v moyen pour effectuer le 2ème passage. Si le 2ème passage a été effectué, on passe alors au calcul du ou des vecteurs propres. On utilise pour cela le sous-programme VPROP qui permet, en excitation multi-point, de calculer les vecteurs propres normés y_v suivant la définition donnée en I.1.3. L'utilisateur peut ou non stocker les valeurs et vecteurs propres sur disque dans le fichier U : 2 en précisant le numéro du mode identifié ainsi que le numéro de l'enregistrement du fichier dans lequel sera rangé le vecteur. Les pulsations propres complexes s_v et les vecteurs propres correspondant sont également listés avec la définition y_v^+ de manière à obtenir l'influence du couplage par amortissement entre modes, les modes faiblement couplés apparaissant avec une forte dominance de la partie réelle.

III.4.1.3. Structure du fichier de sortie U : 2.

Ce fichier dispose d'un nombre suffisant d'enregistrements pour ranger tous les vecteurs propres identifiés. Dans chaque enregistrement, on trouve y_v , s_v sous forme complexe rangés de la manière suivante :



Le vecteur propre est rangé dans l'ordre des capteurs, de 1 à IP. Les composantes correspondant aux capteurs de force et aux capteurs qui n'avaient pas été traités n'ont pas été supprimées mais mises à zéro, de manière à respecter la numérotation initiale.

Si l'on désire traiter à nouveau une fonction de transfert, on peut remonter à 600 pour entrer de nouveaux paramètres à la console.

Remarque : Il est possible qu'un vecteur propre soit identifié plusieurs fois. Par exemple, dans le cas de modes proches, on peut identifier un mode en l'isolant ou en le groupant avec un mode adjacent. Il faut donc prévoir dans U : 2 un nombre suffisant d'enregistrements pour stocker tous les modes. On devra ensuite, lors du calcul de la réponse forcée, choisir les modes qui seront pris en compte pour représenter le comportement dynamique de la structure.

III.4.2. Tracé des réponses forcées mesurées et identifiées : programme "REPONSE" :

III.4.2.1. Caractéristiques du programme :

"REPONSE" permet de tracer les réponses forcées mesurées (amplitude et phase de l'accélération) pour chaque capteur afin de déterminer les domaines de fréquence dans lequel doivent être analysées les réponses forcées. De plus, "REPONSE" permet de calculer la réponse forcée en accélération à partir des caractéristiques dynamiques identifiées. Il est alors possible par superposition de comparer l'efficacité de la méthode de lissage.

Compte-tenu de la grande dynamique de la réponse, on a choisi des coordonnées semi-logarithmiques : fréquence en abscisse, $\log_{10}$ de l'accélération exprimée en m/s^2 en ordonnée.

Le calcul de la réponse forcée identifiée est effectué à partir de l'expression donnée en I.1.2.3. soit :

$$y = \left[\sum_{v=1}^n \frac{y_v^T y_v}{s - s_v} + \sum_{v=1}^n \frac{\bar{y}_v^T \bar{y}_v}{s - \bar{s}_v} \right] f$$

Le calcul de la réponse forcée est effectué entre les fréquences F1 et F2 avec le pas POS. Les capteurs sont traités successivement et les réponses calculées sont rangées dans le même fichier que les réponses mesurées mais sous forme amplitude phase.

Les valeurs et vecteurs propres nécessaires au calcul sont lus dans le fichier U : 2 qui a été rempli par "LISSAGE".

Dans la pratique, le calcul est effectué de la manière suivante : on calcule le vecteur $T_y.f$ indépendant de ω , puis pour chaque capteur, de FINI à FFIN avec le pas POS, on calcule :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{y} & = & \boxed{Y} & \boxed{\frac{1}{s-s_v}} & \boxed{T_{Y.f}} & + & \boxed{\bar{Y}} & \boxed{\frac{1}{s-\bar{s}_v}} & \boxed{T_{\bar{Y}.f}} \\
 \text{IPx1} & & \text{IPxn} & \text{nxn} & \text{nx1} & & \text{IPxn} & \text{nxn} & \text{nx1}
 \end{array}$$

L'accélération est obtenue pour chaque valeur de la pulsation en multipliant y par $-\omega^2$. On en déduit ensuite l'amplitude et la phase.

On calcule les réponses identifiées si l'on introduit une valeur de SUP égale à zéro. Les valeurs sont stockées dans le fichier U : 1.

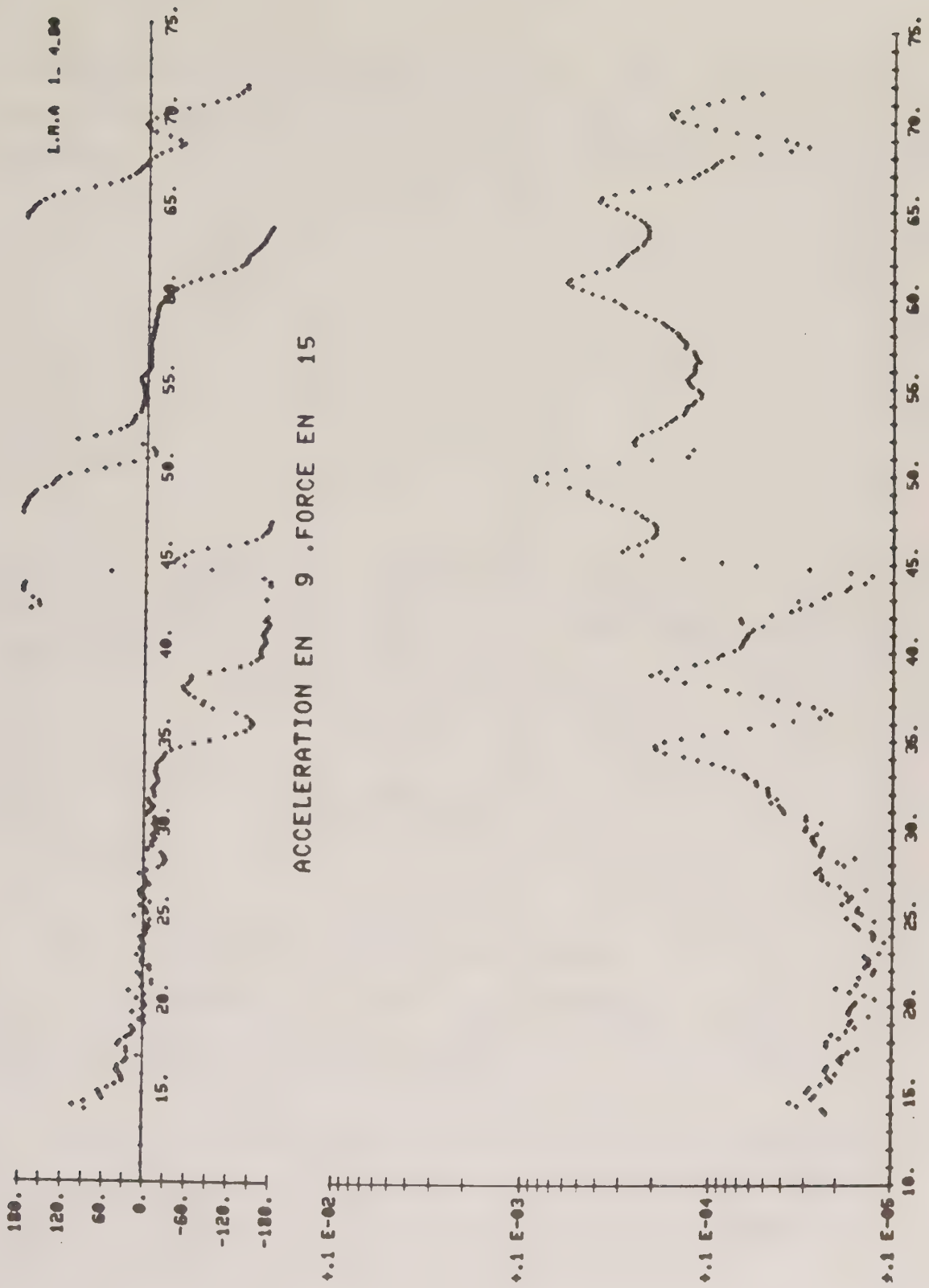
Au cours du calcul, on détermine l'accélération maximale sur tous les points, de manière à calibrer automatiquement l'échelle des ordonnées.

L'opérateur peut repasser ensuite le programme sans avoir à refaire le calcul de la réponse identifiée en introduisant la valeur de SUP déterminée lors du calcul. Il peut visualiser dans n'importe quelle bande de fréquence située entre FINI et FFIN, la réponse forcée mesurée, ou calculée, ou les deux simultanément (fig. 9 p 64).

III.4.2.2. Structure du fichier U : 1.

On a vu que U : 1 permettait de stocker aussi bien les réponses forcées mesurées que celles identifiées. Les réponses mesurées et calculées ne sont pas rangées sous la même forme. Pour accélérer le dépouillement dans "LISSAGE", on a stocké les réponses mesurées sous forme phase quadrature, de manière à pouvoir afficher directement les lieux de Nyquist. On est donc obligé dans "REPONSE" de calculer l'amplitude et la phase avant de procéder à l'affichage. Par contre, les réponses calculées n'intervenant que par leur amplitude et phase ont été stockées sous cette forme :

Fig. 9

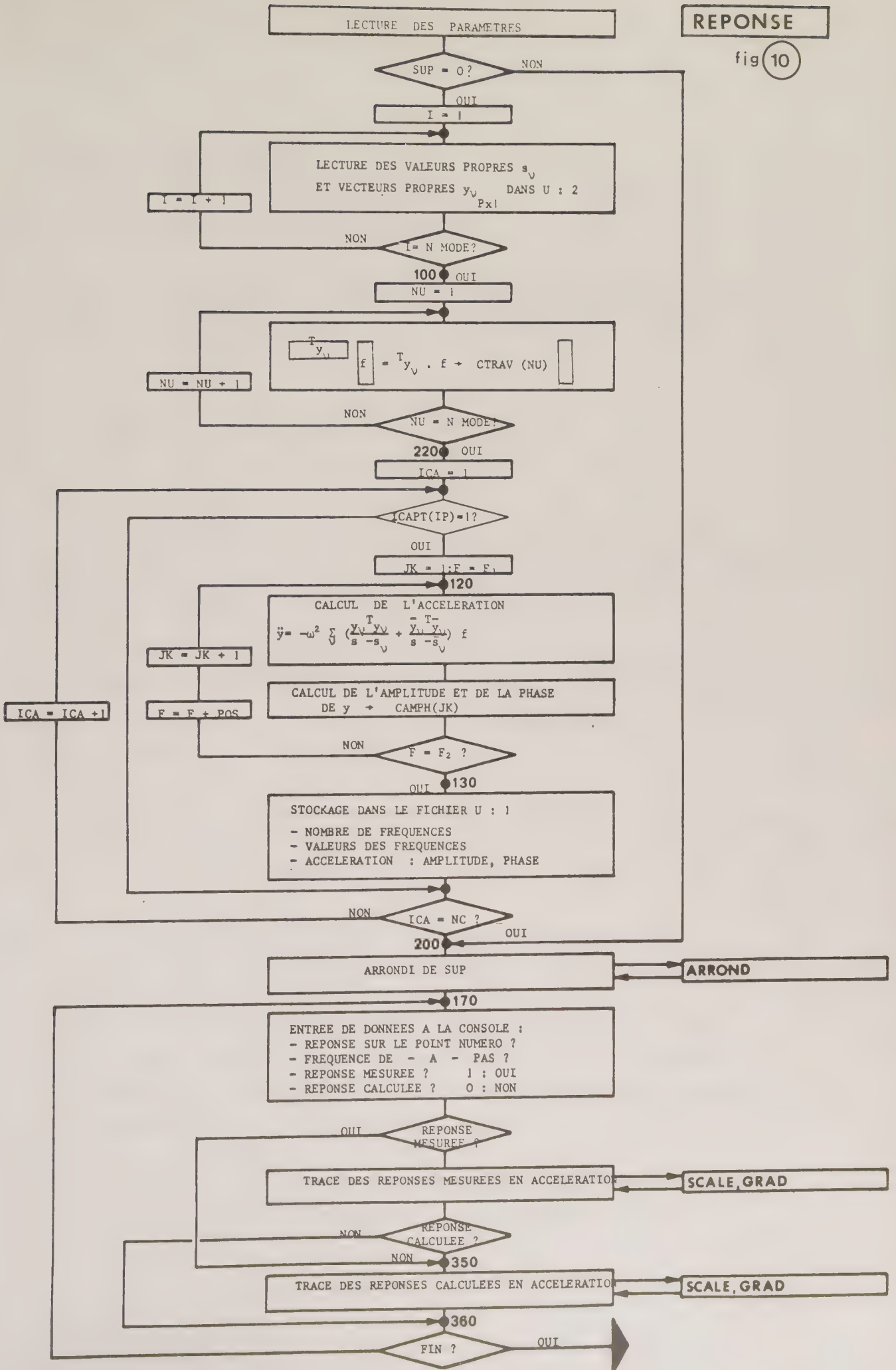


enregistrement n°1 (nbre de fréquences, fréquences)	JK		NCAP enregistrements (mesure)
	F1		
	F2		
capteur n°1 enregistrement n°2 (réponses phase et quadrature)	R()	I()	
	R()	I()	
enregistrement n°NCAP+1 (nbre de fréquences, fréquences)	JK		NCAP enregistrements (calcul)
	F1		
	F2		
enregistrement n°NCAP+2 capteur n°1 (amplitude, phase)	Ampl.	Phase	

III.4.2.3. Organisation générale du programme :

Cette organisation est donnée fig. 10. Lorsque l'on calcule la réponse forcée, la valeur de SUP est arrondie et on fixe l'échelle logarithmique des ordonnées entre 10^{-3} SUP et SUP.

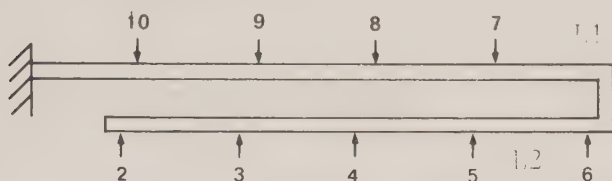
Lors de la 1ère étape définie en III-4-2-1 (tracé de la réponse forcée pour localiser les fréquences propres), on introduit une valeur convenable pour SUP. Cette valeur peut être obtenue à partir du programme qui construit le fichier U : 1 à partir des résultats d'essais.



III.5. Résultats obtenus :

III.5.1. Mesures sur une poutre repliée :

Le poutre repliée se compose de 2 poutres en fer plat de longueur L1 et L2. La poutre L1 est encastree à gauche et soudée à droite à la poutre L2.



La forme de la structure lui confère la propriété de posséder des fréquences groupées par paire et d'autant plus rapprochées que L1 est voisin de L2.

La structure comporte 10 accéléromètres numérotés de 2 à 11. (Le numéro 1 étant le numéro du capteur de force). L'excitation est appliquée au point 2. Le dépouillement des mesures donne les résultats suivants :

1. Les figures 11 à 20 montrent la réponse forcée mesurée (+) en amplitude et phase sur tous les points capteurs. Nous constatons qu'il y a 4 modes aux fréquences 117 Hz ; 128 Hz ; 261 Hz et 337 Hz.
2. Les figures 21 à 32 montrent les lieux de Nyquist pour tous les points capteurs. Les 2 premiers modes ont été calculés ensemble et les 2 autres séparément.
Lors du premier passage, les valeurs de s_v varient d'un capteur à l'autre comme nous l'avons dit au chapitre III.2. Au deuxième passage, on voit sur les lieux de Nyquist l'amélioration qu'apporte un deuxième calcul fait en imposant s_v moyen.
3. La figure 33 donne les valeurs propres et vecteurs propres identifiés à partir de ces 4 modes pour tous les points capteurs.

On peut vérifier sur les figures 11 à 20 la cohérence des résultats obtenus entre les réponses mesurées (+) et calculées ($\square$).

On constate que l'identification aux antirésonances est mauvaise. Ceci est dû au fait que nous n'avons pas pris en compte tous les modes lors du calcul d'identification, en particulier les deux premiers qui étaient à des fréquences trop faibles pour les accéléromètres utilisés.

III.5.2. Mesures industrielles :

Des mesures faites par l'EDF sur une structure plus complexe ont été dépouillées au Laboratoire. Ces mesures étaient fortement bruitées comme le montre fig. 9 p 64. Le lissage des lieux de Nyquist donne cependant des résultats satisfaisants (fig. 6 et 7 p 48 et 49).

Fig. 11

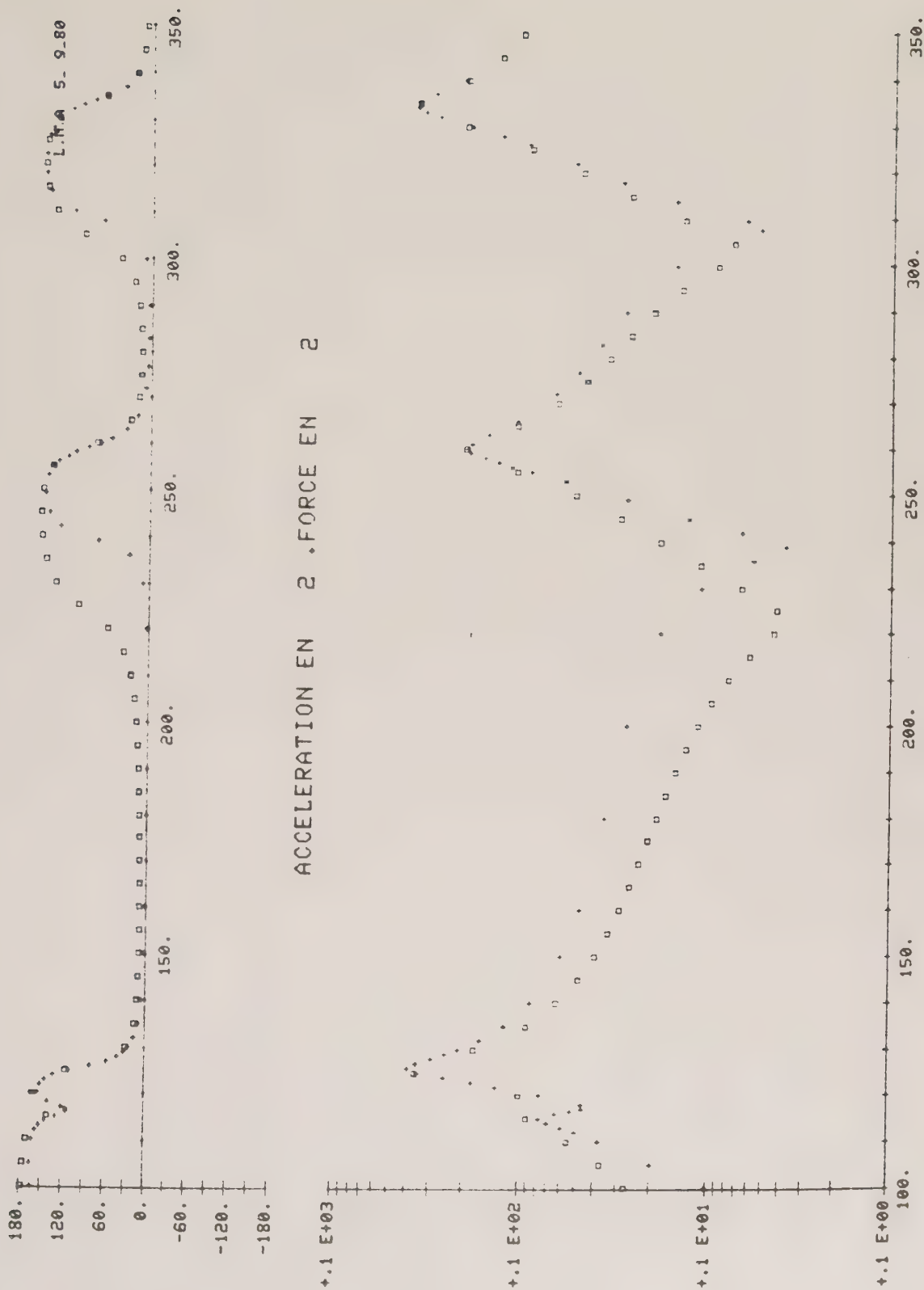


Fig. 12

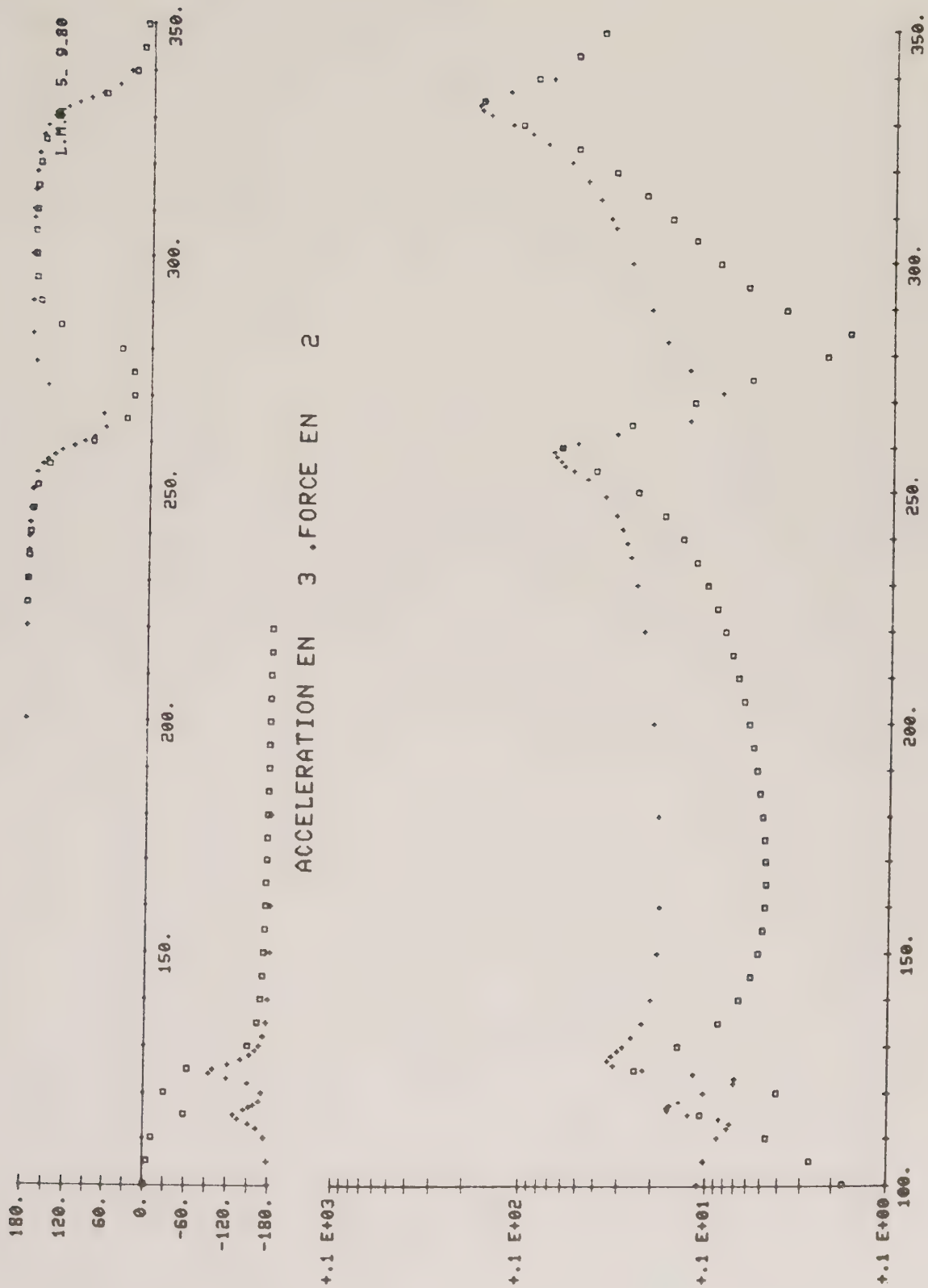
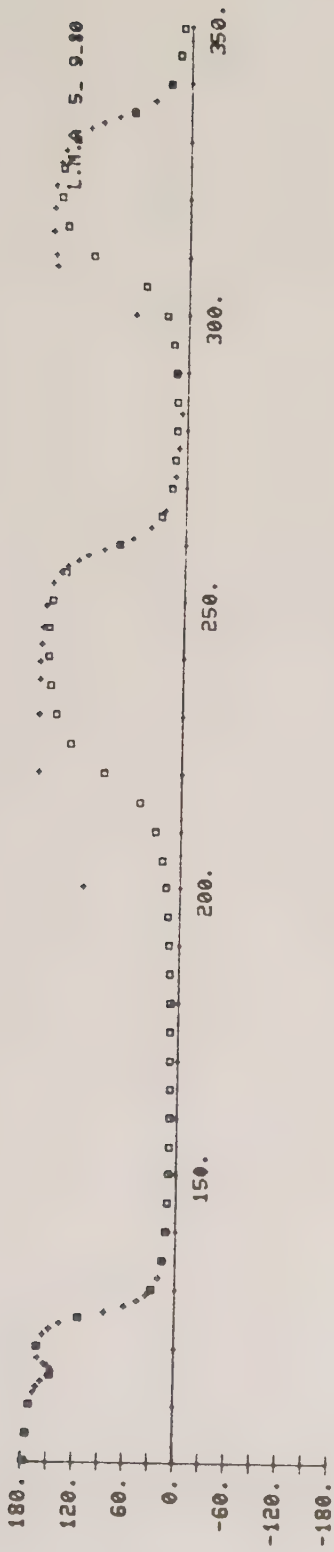


Fig. 13



ACCELERATION EN 4 .FORCE EN 2

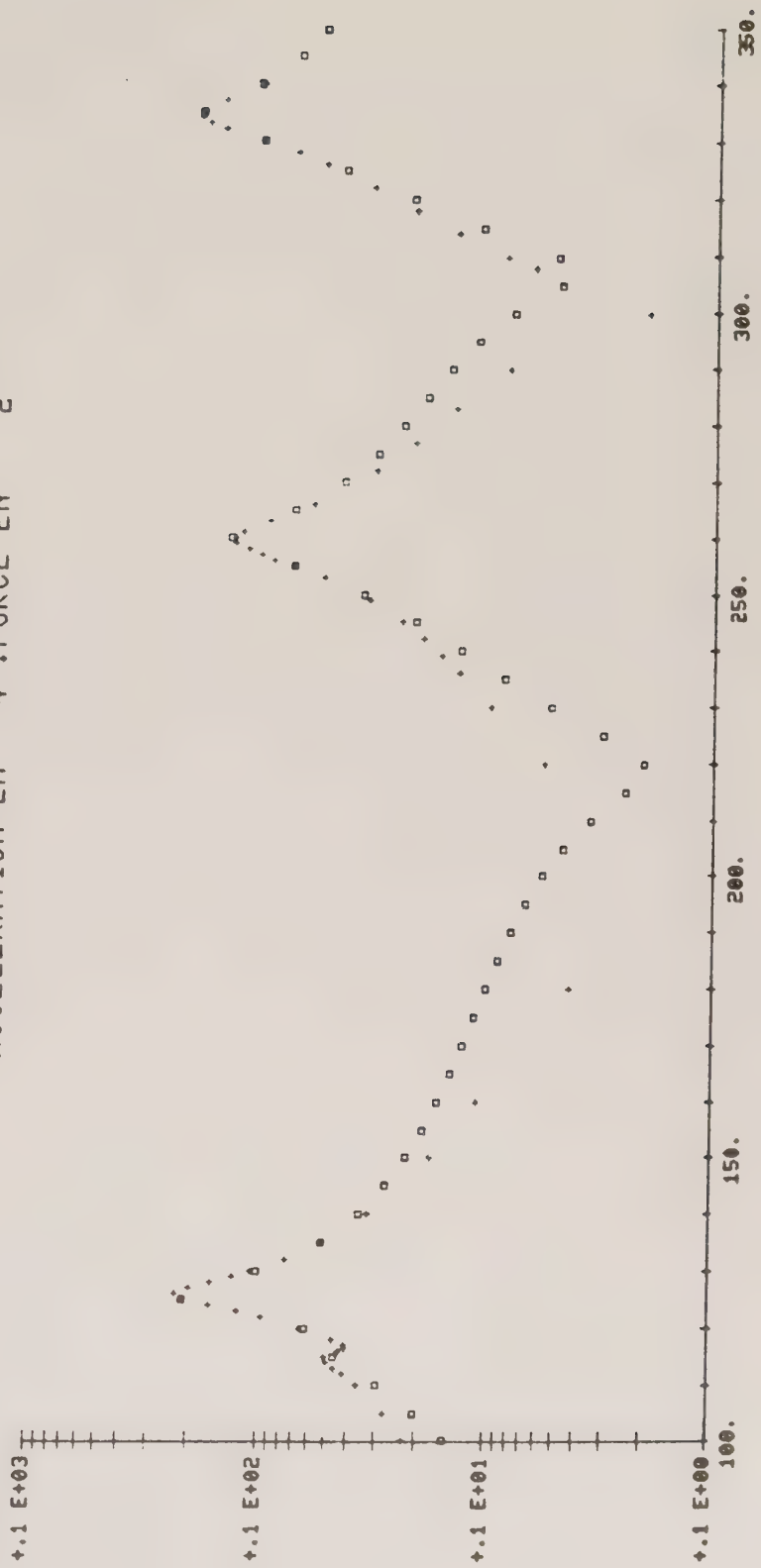


Fig. 14

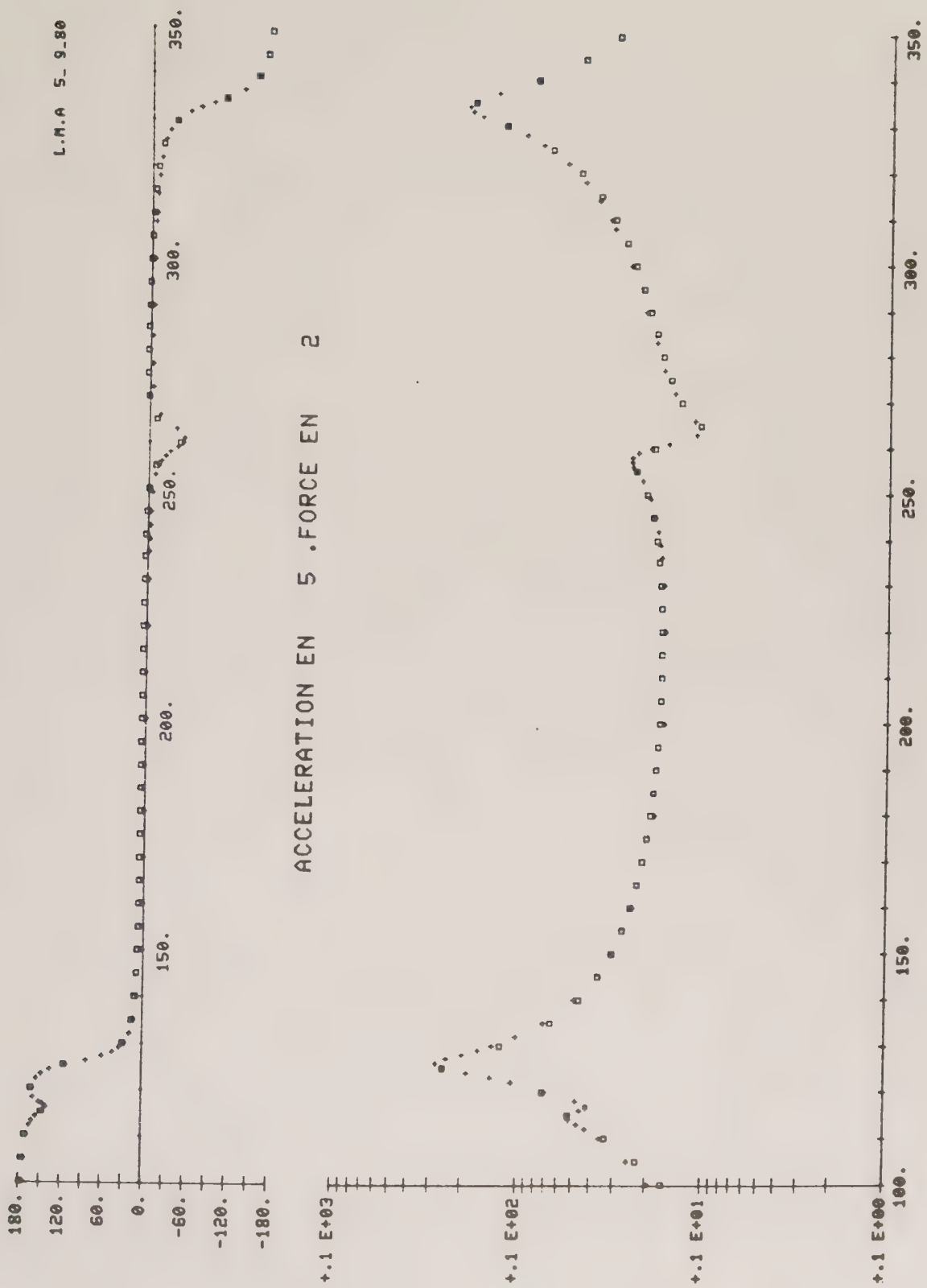


Fig. 15

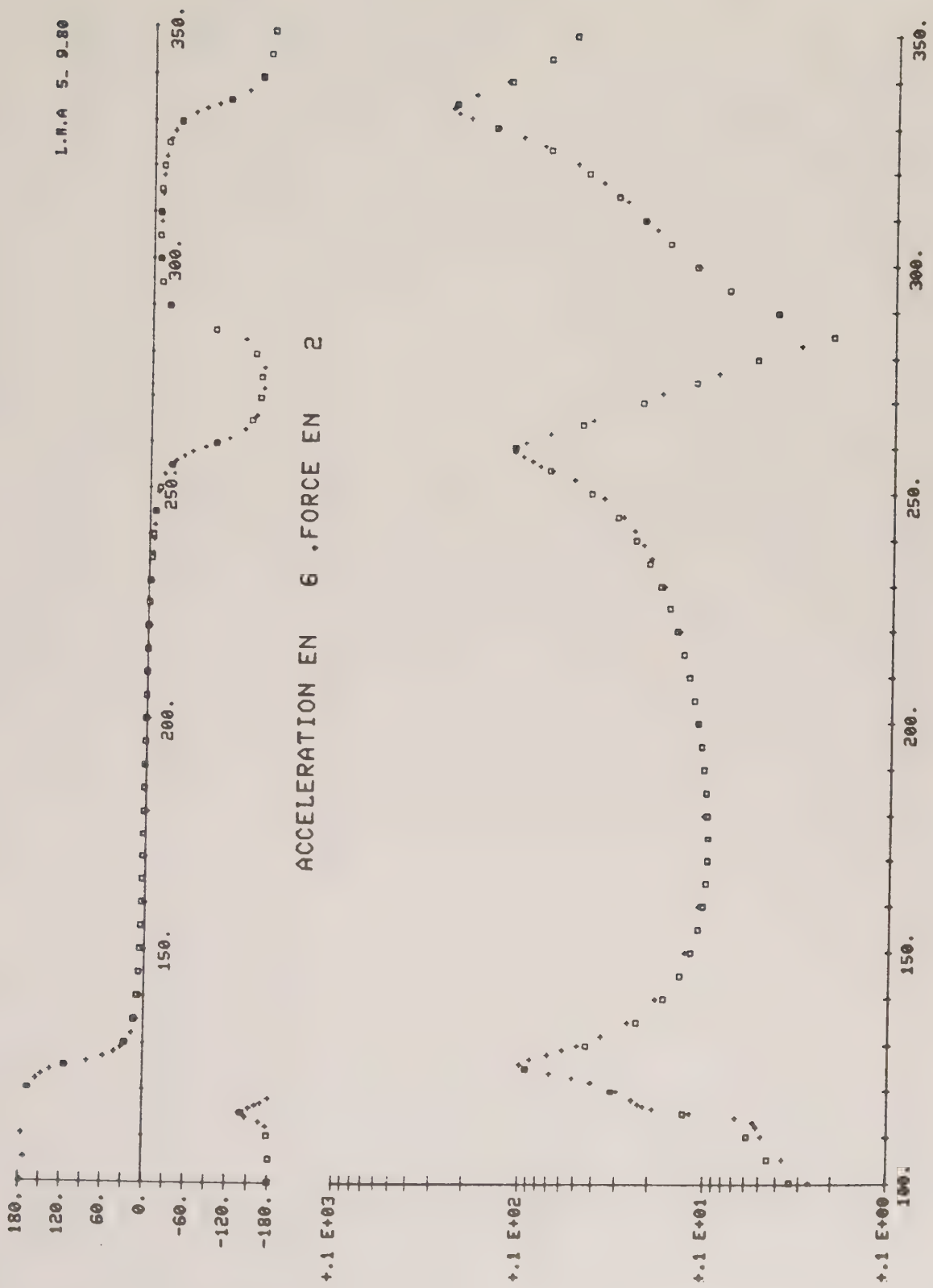


Fig. 16

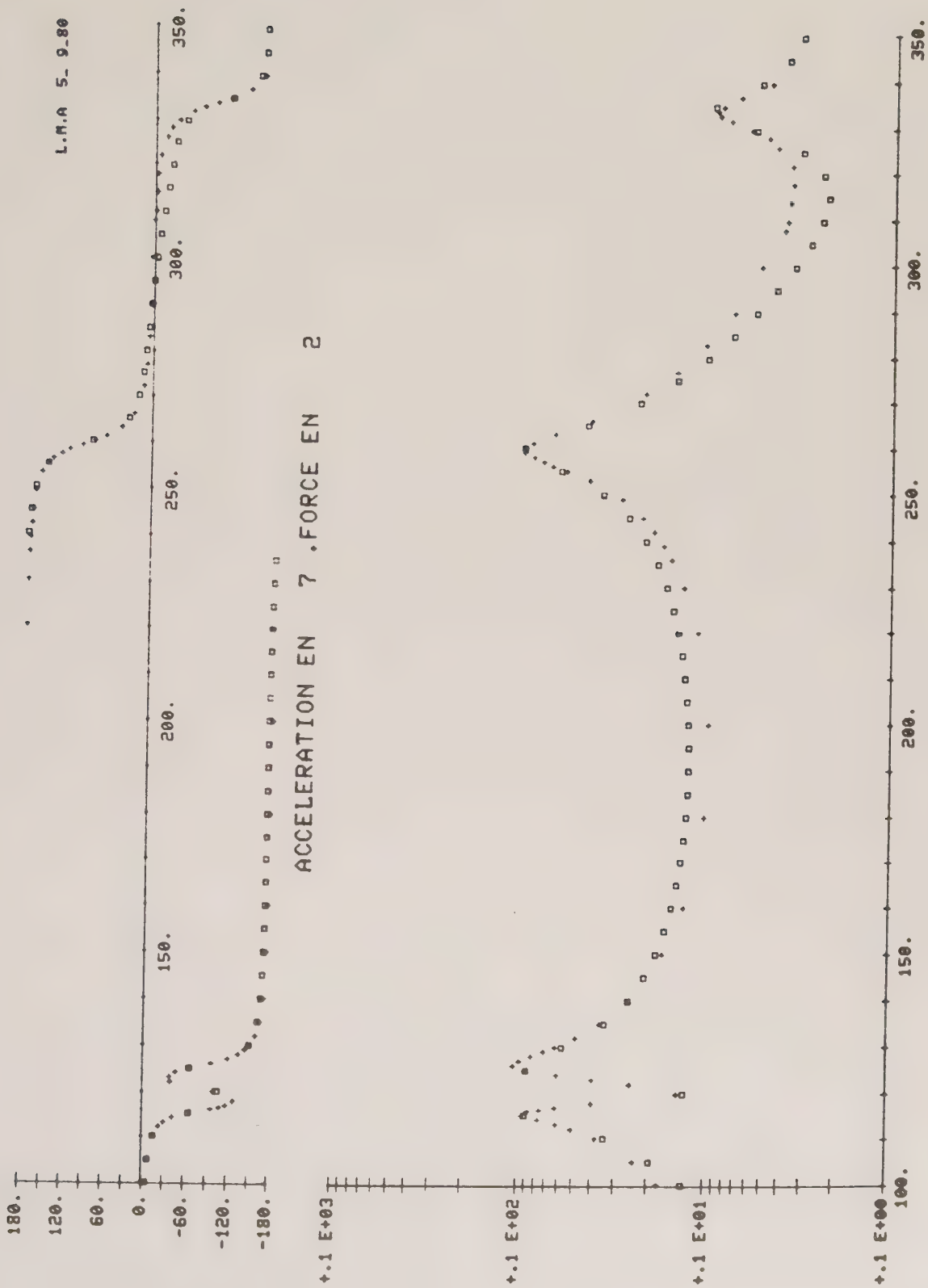


Fig. 17

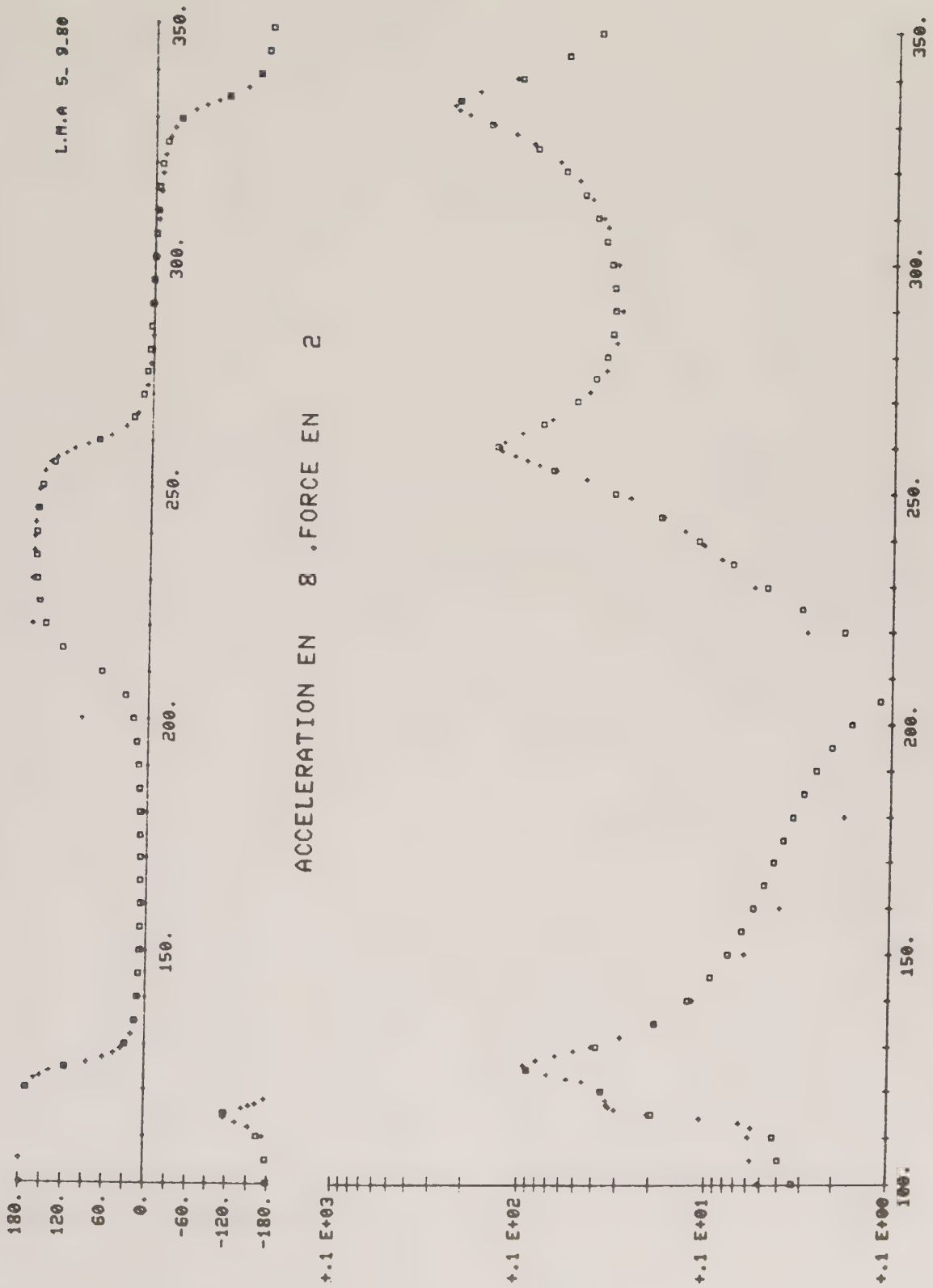


Fig. 18

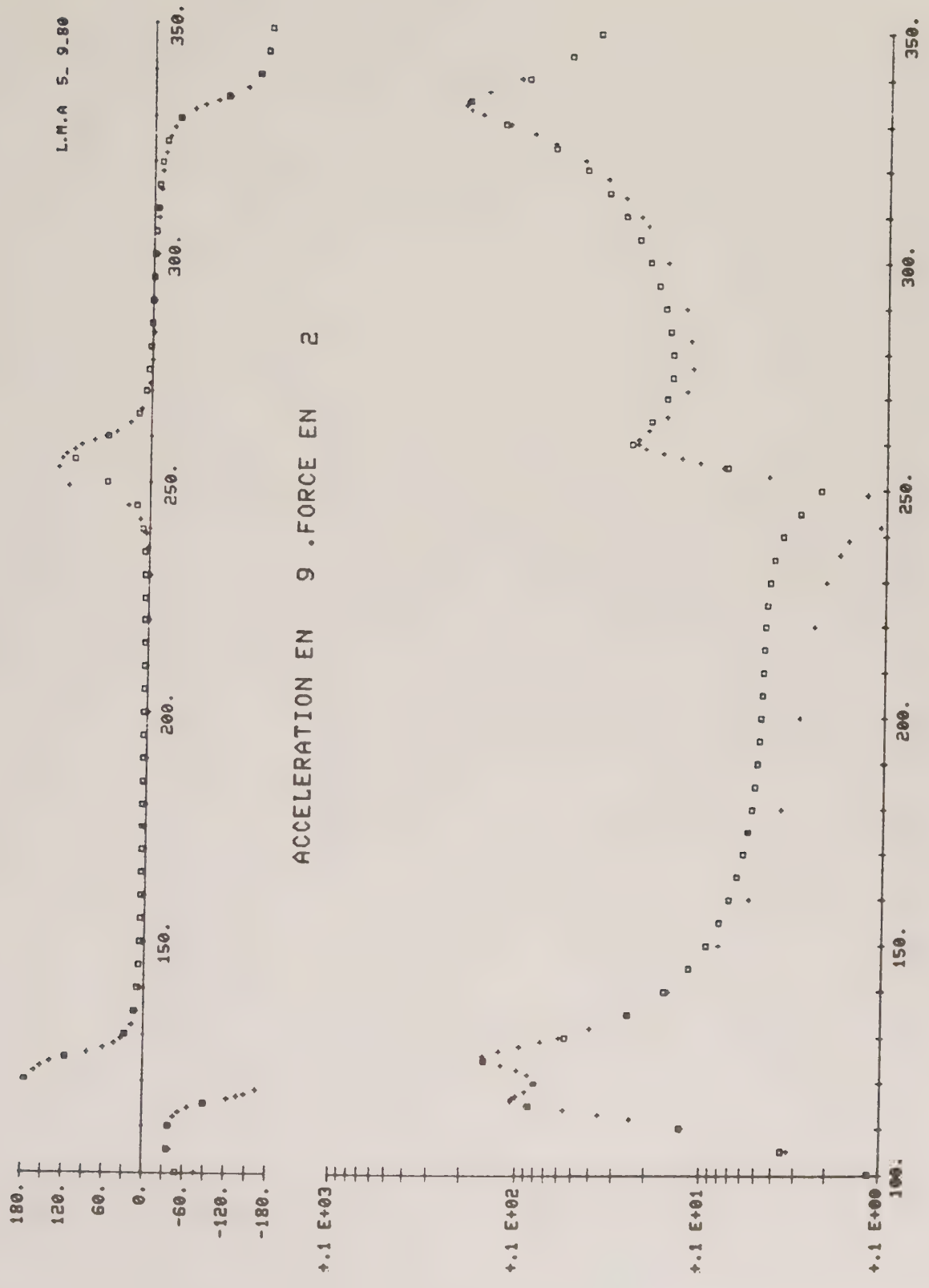


Fig. 19

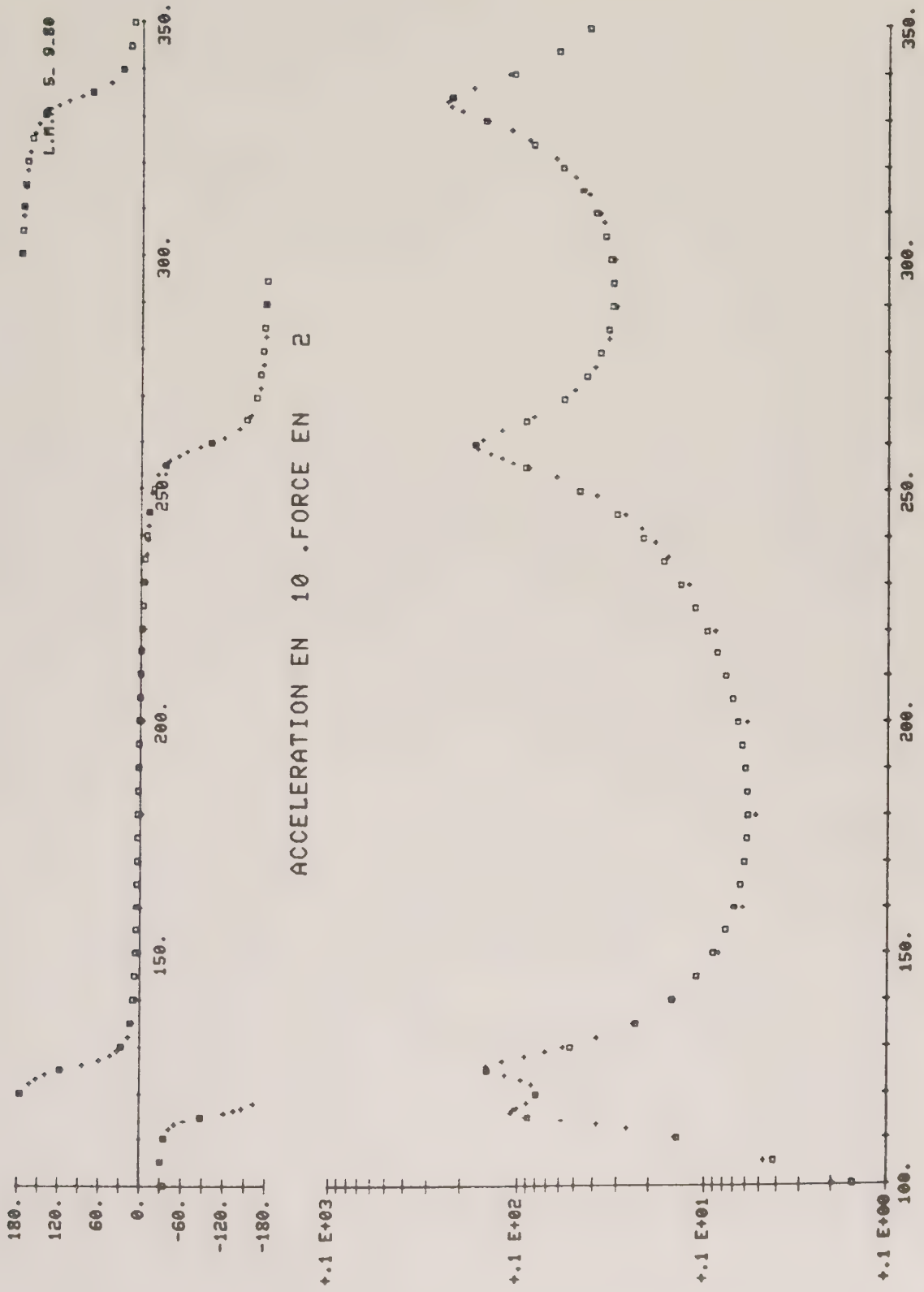


Fig. 20

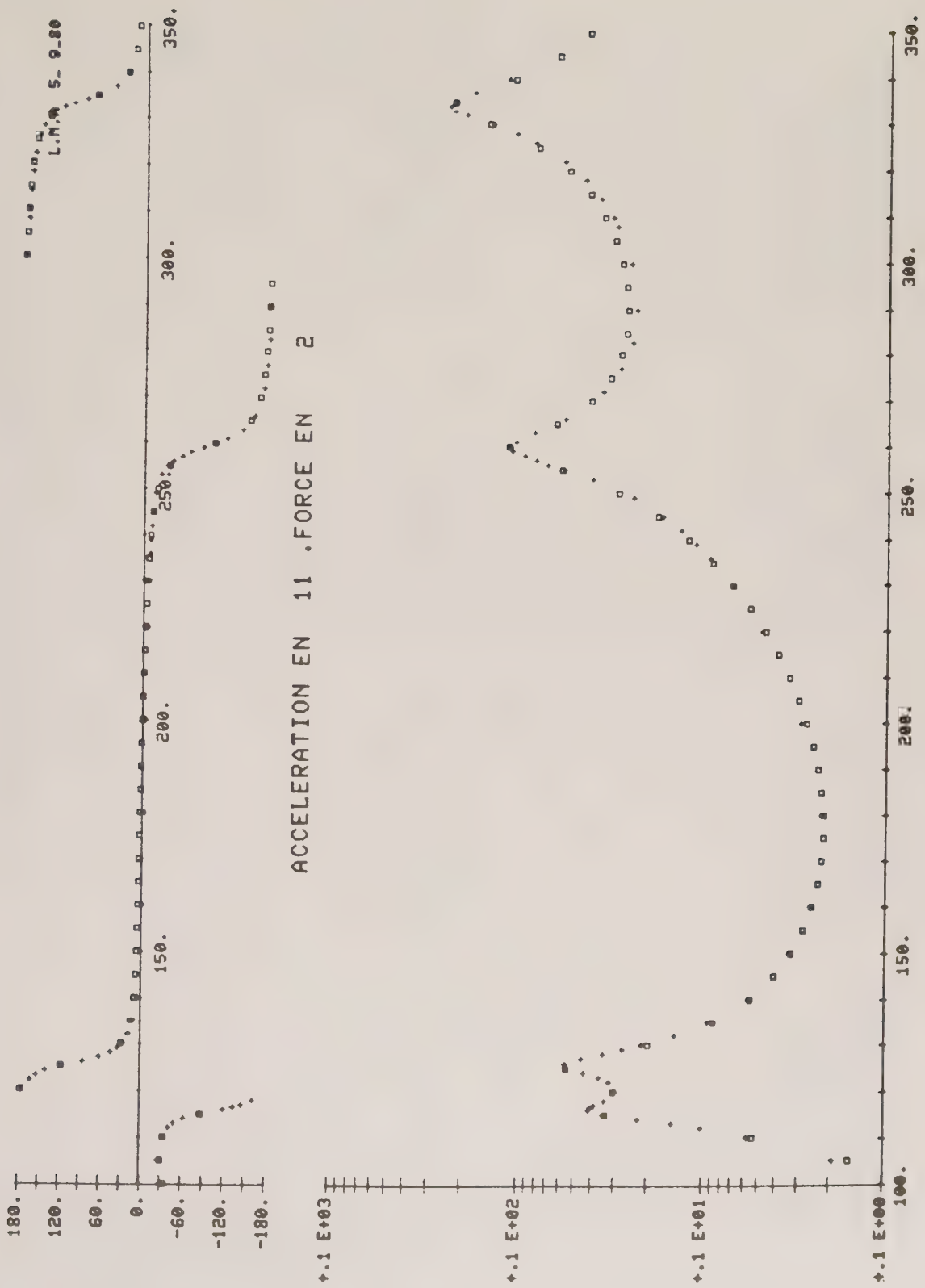


Fig. 21

20 FREQUENCES DE 110.00 HZ A 132.00 HZ

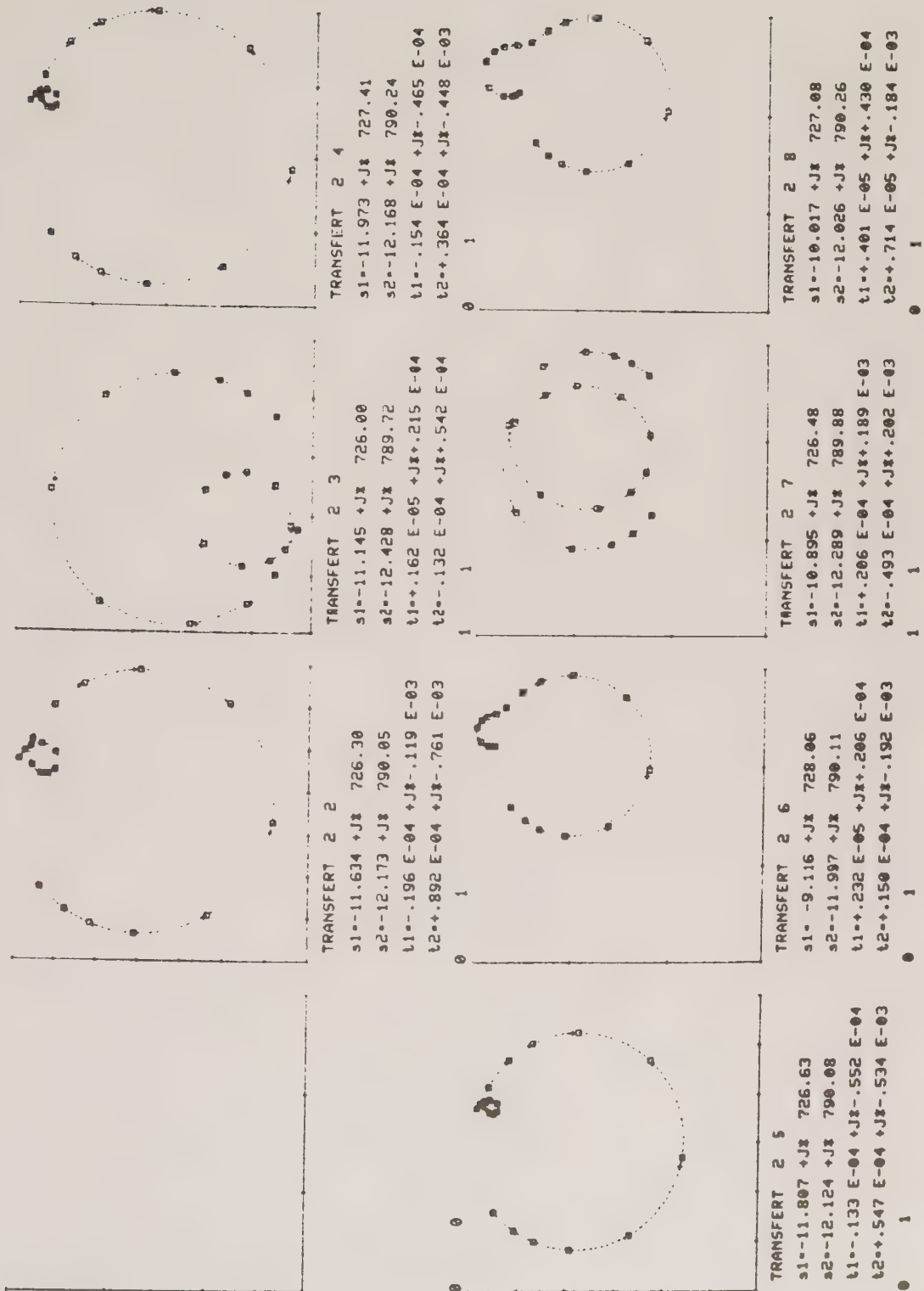
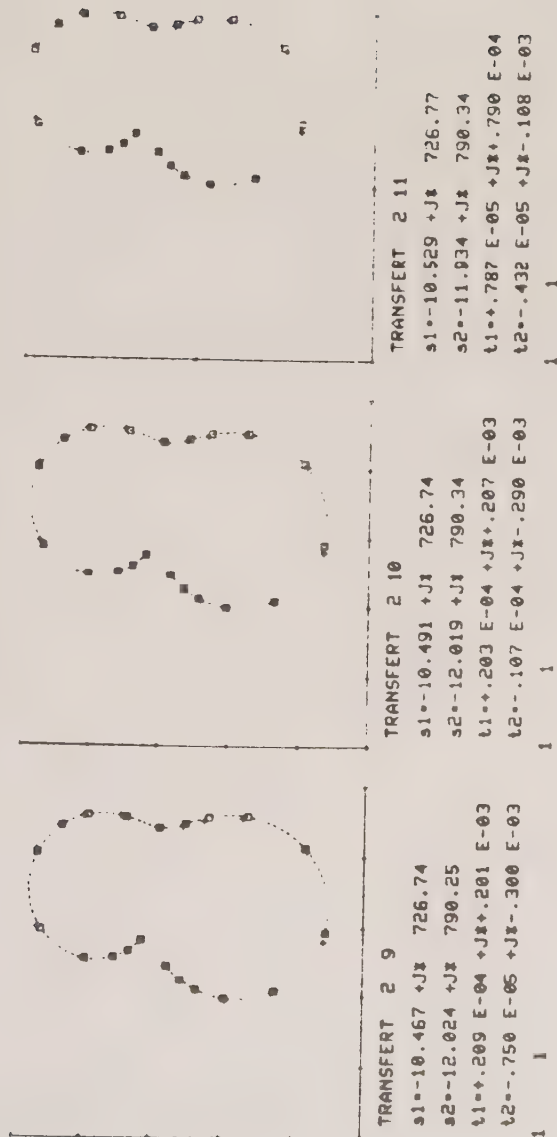


Fig. 22

20 FREQUENCES DE 110.00 HZ A 132.00 HZ



20 FREQUENCES DE 110.00 HZ A 132.00 HZ

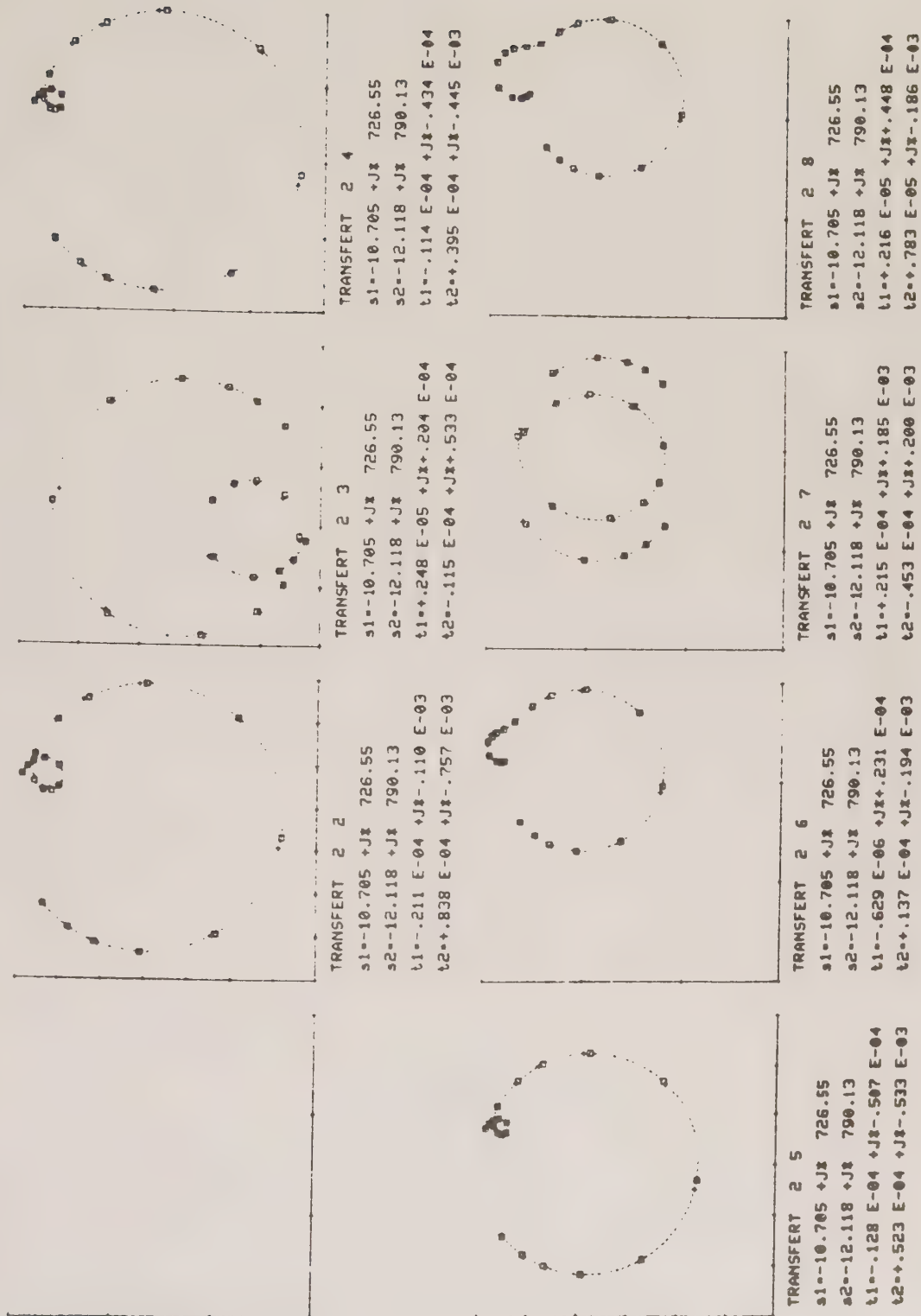


Fig. 23

Fig. 24

20 FREQUENCES DE 110.00 HZ A 132.00 HZ

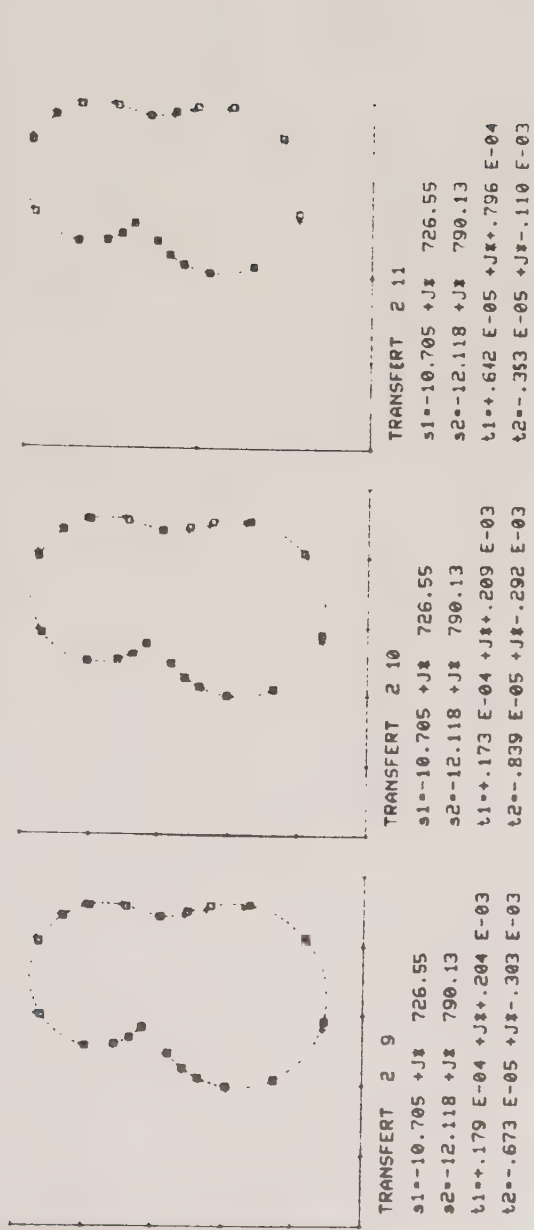


Fig. 25

12 FREQUENCES DE 249.00 HZ A 272.00 HZ

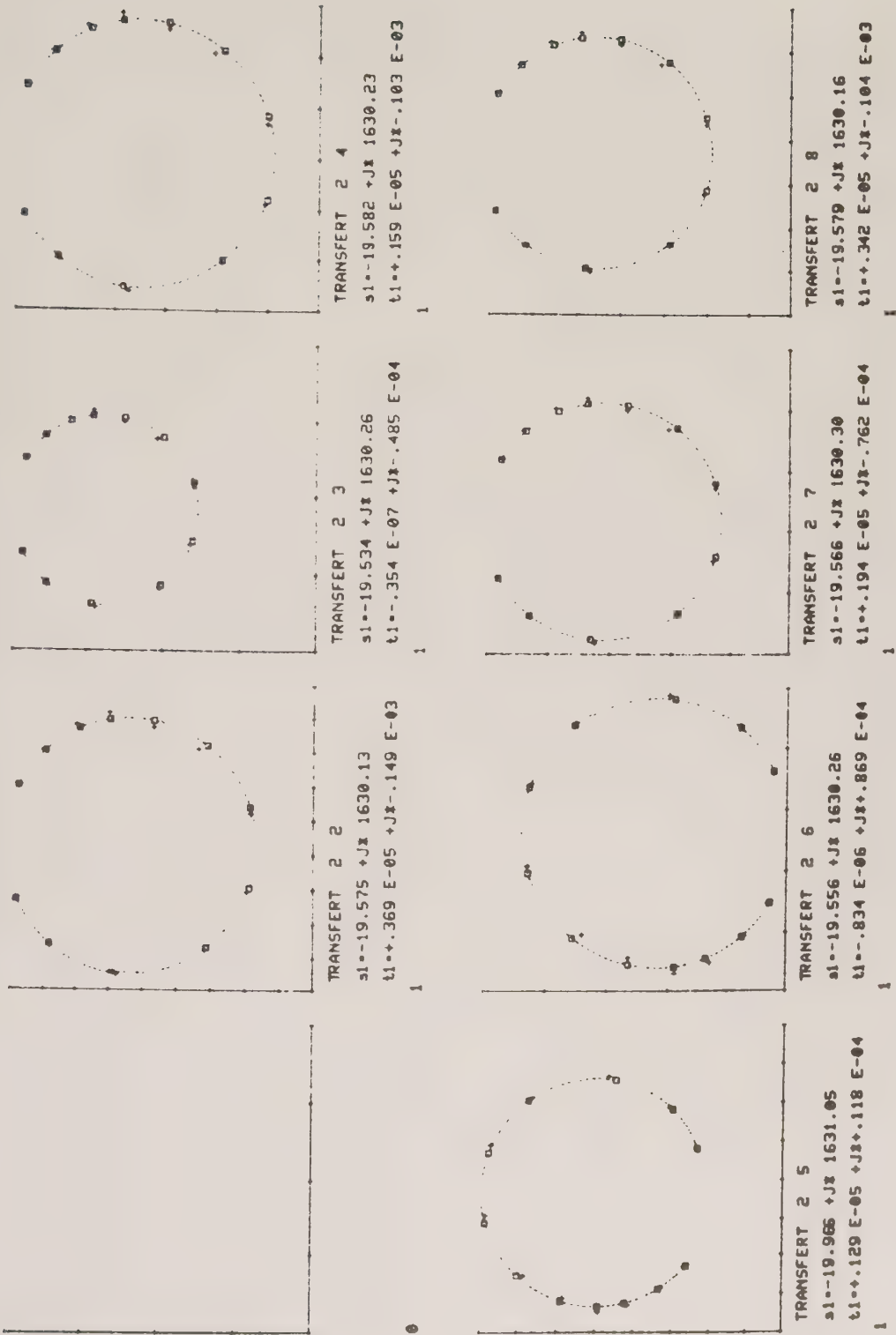
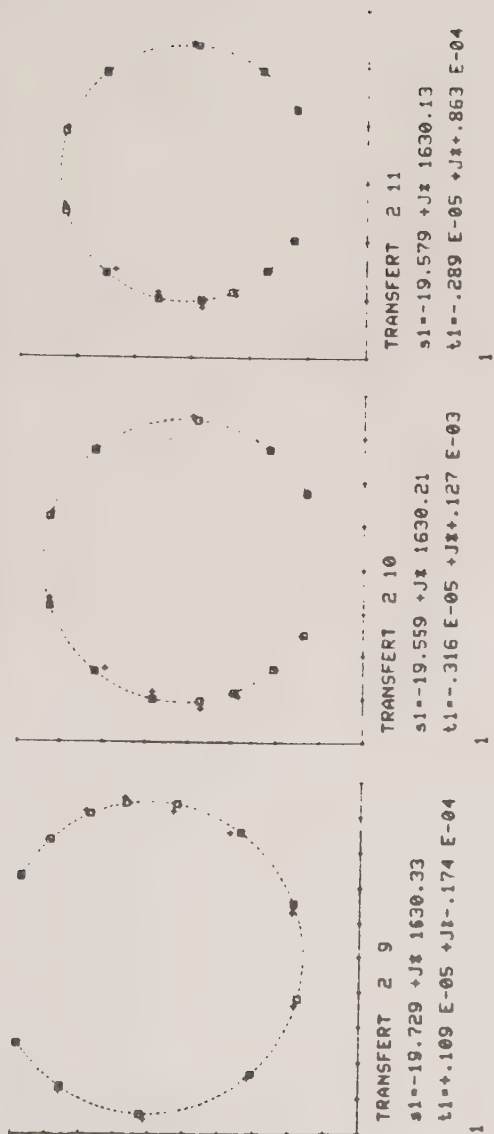


Fig. (26)

12 FREQUENCES DE 249.00 HZ A 272.00 HZ



12 FREQUENCES DE 249.00 HZ A 272.00 HZ

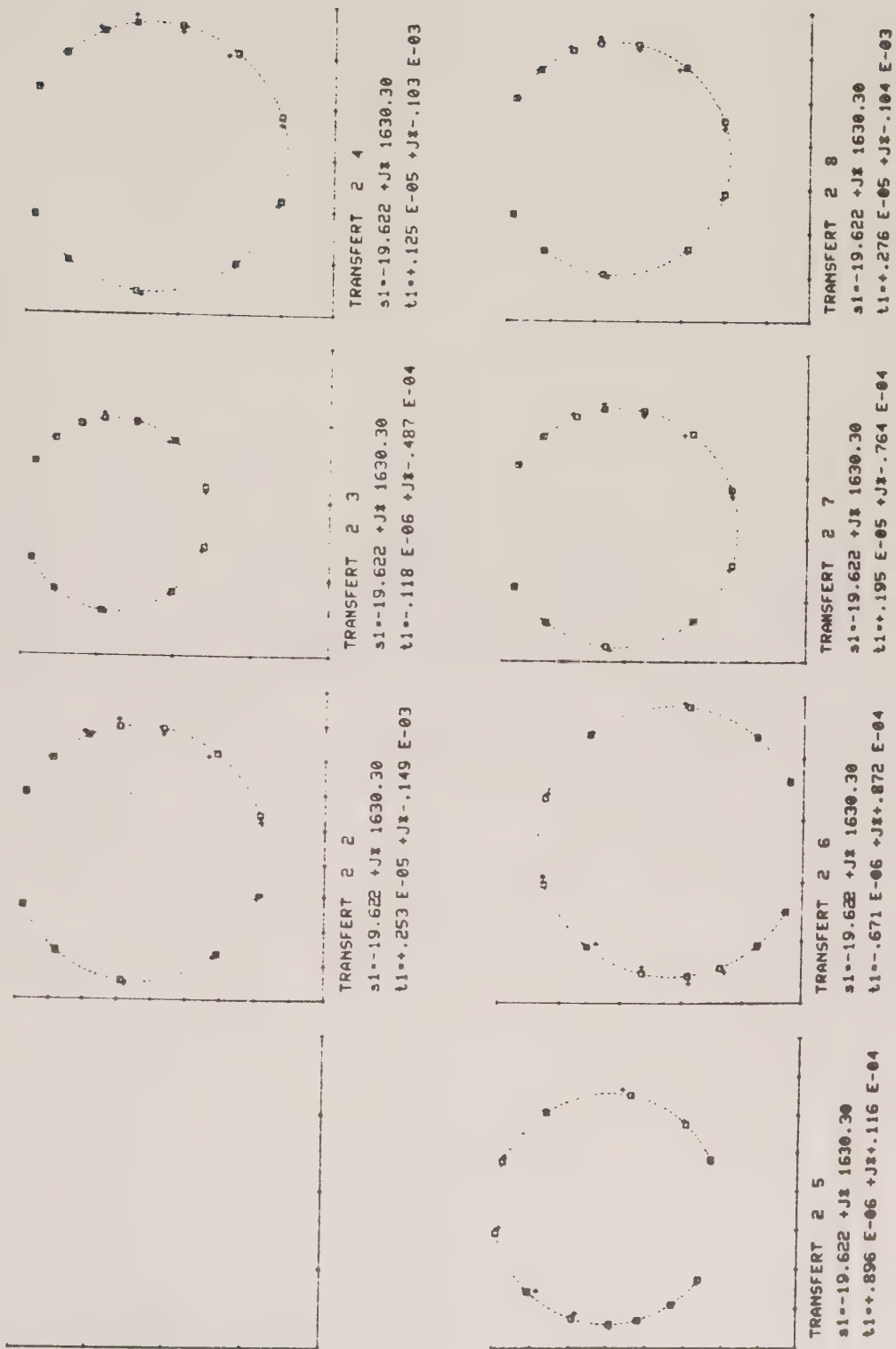


Fig. 27

Fig. (28)

12 FREQUENCES DE 249.00 HZ A 272.00 HZ

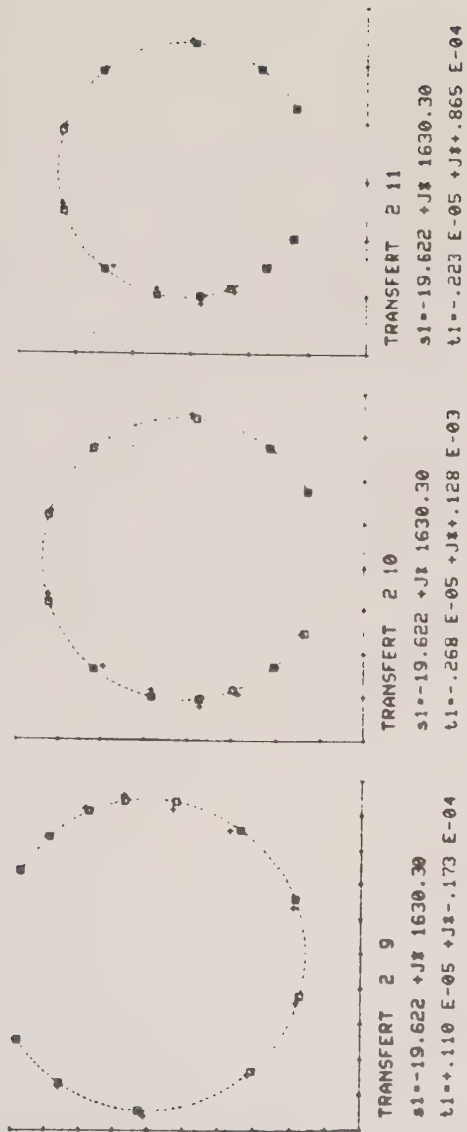


Fig. 29

14 FREQUENCES DE 308.00 HZ A 339.99 HZ

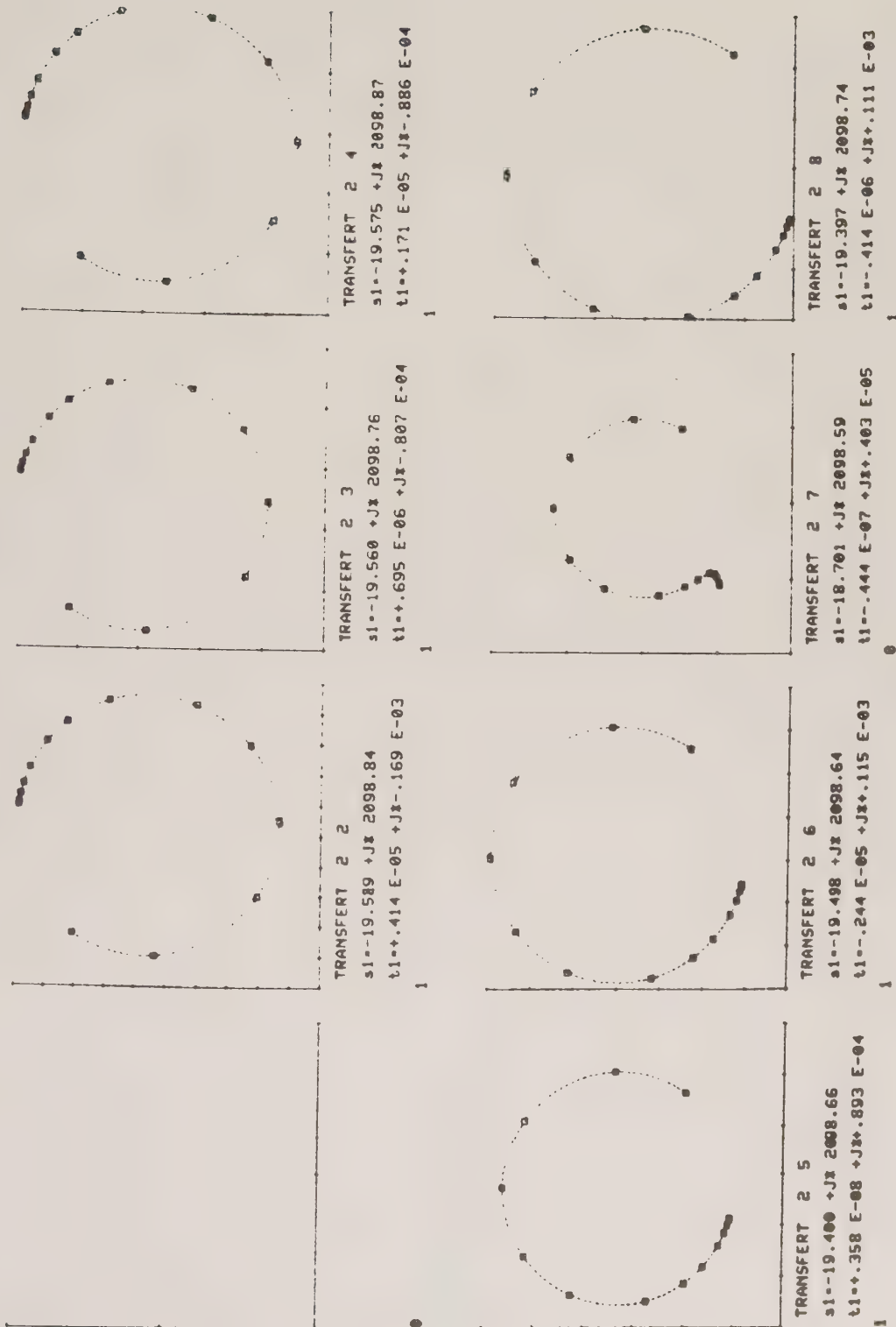


Fig. 30

14 FREQUENCES DE 308.00 HZ A 339.99 HZ

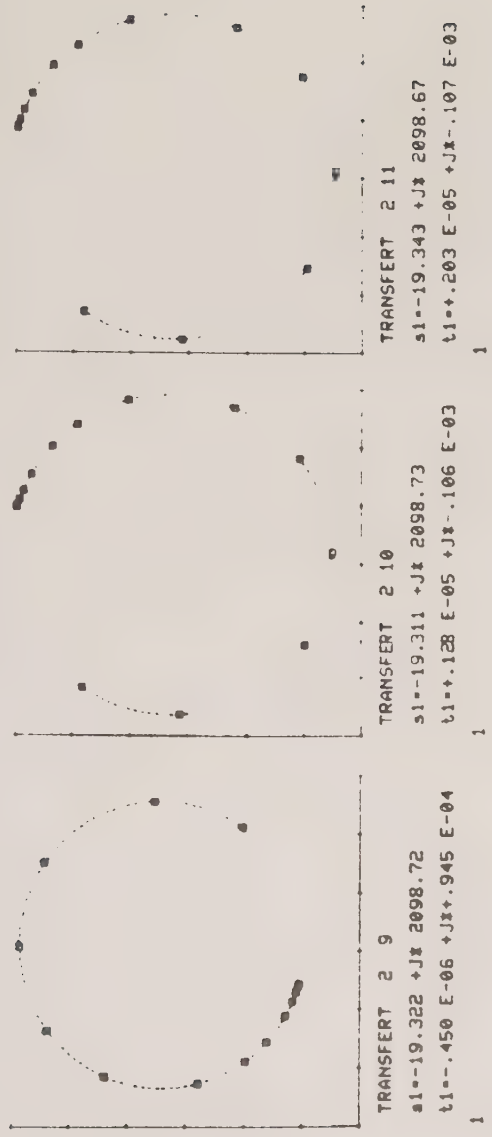


Fig. 31

14 FREQUENCES DE 308.00 HZ A 339.99 HZ

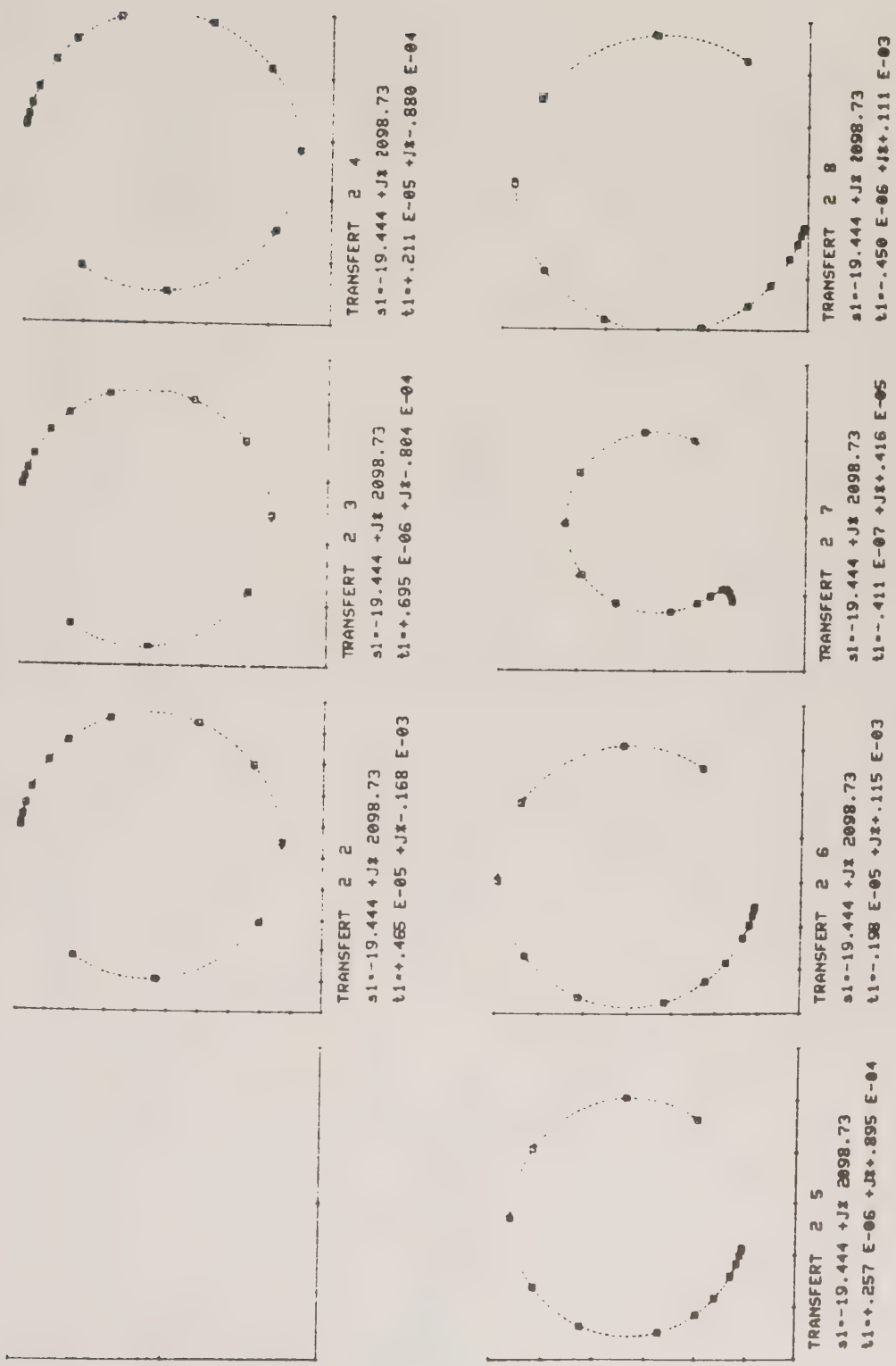
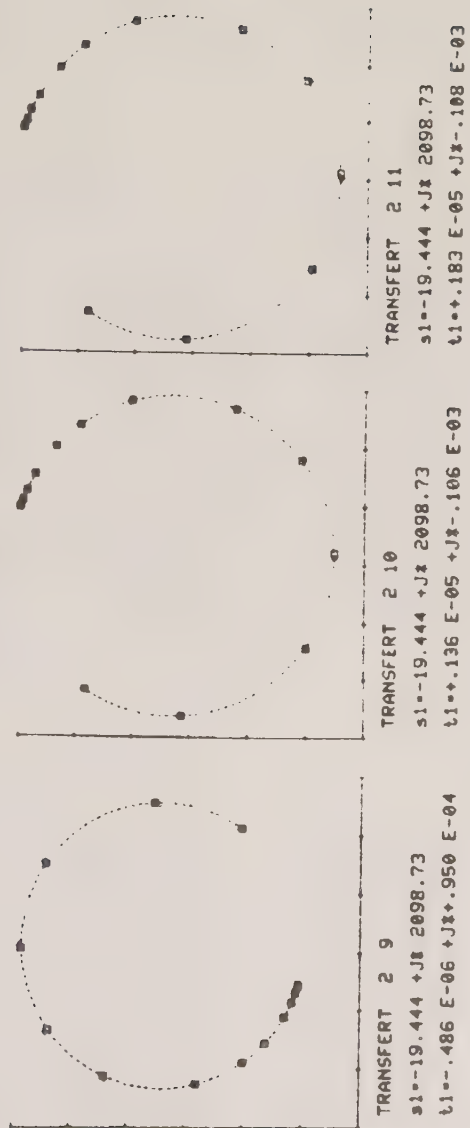


Fig. 32

14 FREQUENCES DE 308.00 HZ A 339.99 HZ



MODE NUMERO:

1

VALEUR PROPRE:

-10.706

726.55

-12.119

790.13

VECTEUR PROPRE

*	.000E+00	.000E+00	1	.000E+00	.000E+00	1
*	-.403E+00	.383E-01	2	.110E+01	.605E-01	2
*	.740E-01	-.192E-02	3	-.776E-01	-.123E-01	3
*	-.159E+00	.261E-01	4	.644E+00	.215E-01	4
*	-.184E+00	.287E-01	5	.771E+00	.329E-01	5
*	.825E-01	.101E-01	6	.280E+00	.438E-02	6
*	.671E+00	-.139E-01	7	-.292E+00	-.492E-01	7
*	.161E+00	.749E-02	8	.268E+00	-.351E-02	8
*	.737E+00	.522E-02	9	.435E+00	-.337E-01	9
*	.757E+00	.930E-02	10	.421E+00	-.353E-01	10
*	.287E+00	.409E-02	11	.158E+00	-.138E-01	11

MODE NUMERO:

3

VALEUR PROPRE:

-19.623

1630.31

VECTEUR PROPRE

*	.000E+00	.000E+00	1
*	.698E+00	.591E-02	2
*	.227E+00	-.248E-02	3
*	.495E+00	.175E-02	4
*	-.544E-01	.465E-02	5
*	-.407E+00	.317E-03	6
*	.357E+00	.609E-02	7
*	.488E+00	.878E-02	8
*	.810E-01	.446E-02	9
*	-.598E+00	-.749E-02	10
*	-.404E+00	-.702E-02	11

MODE NUMERO:

4

VALEUR PROPRE:

-19.444

2098.74

VECTEUR PROPRE

*	.000E+00	.000E+00	1
*	.840E+00	.116E-01	2
*	.402E+00	-.208E-02	3
*	.440E+00	.446E-02	4
*	-.447E+00	.747E-02	5
*	-.576E+00	-.194E-02	6
*	-.208E-01	.819E-04	7
*	-.359E+00	.548E-02	8
*	-.474E+00	.413E-02	9
*	.534E+00	-.582E-03	10
*	.540E+00	.170E-02	11

CHAPITRE IV

CAS D'UNE STRUCTURE NON LINEAIRE

Lorsqu'une structure est non linéaire, on peut commettre de grosses erreurs d'identification même dans le cas de faibles non linéarités. Pour mettre en évidence ce défaut, on a testé la méthode de lissage sur une structure formée de deux poutres assemblées par vis. La réponse au point d'excitation donnée fig. (34) montre clairement le comportement non linéaire de la structure avec des pentes de la courbe de réponse très différentes de part et d'autre de la résonance.

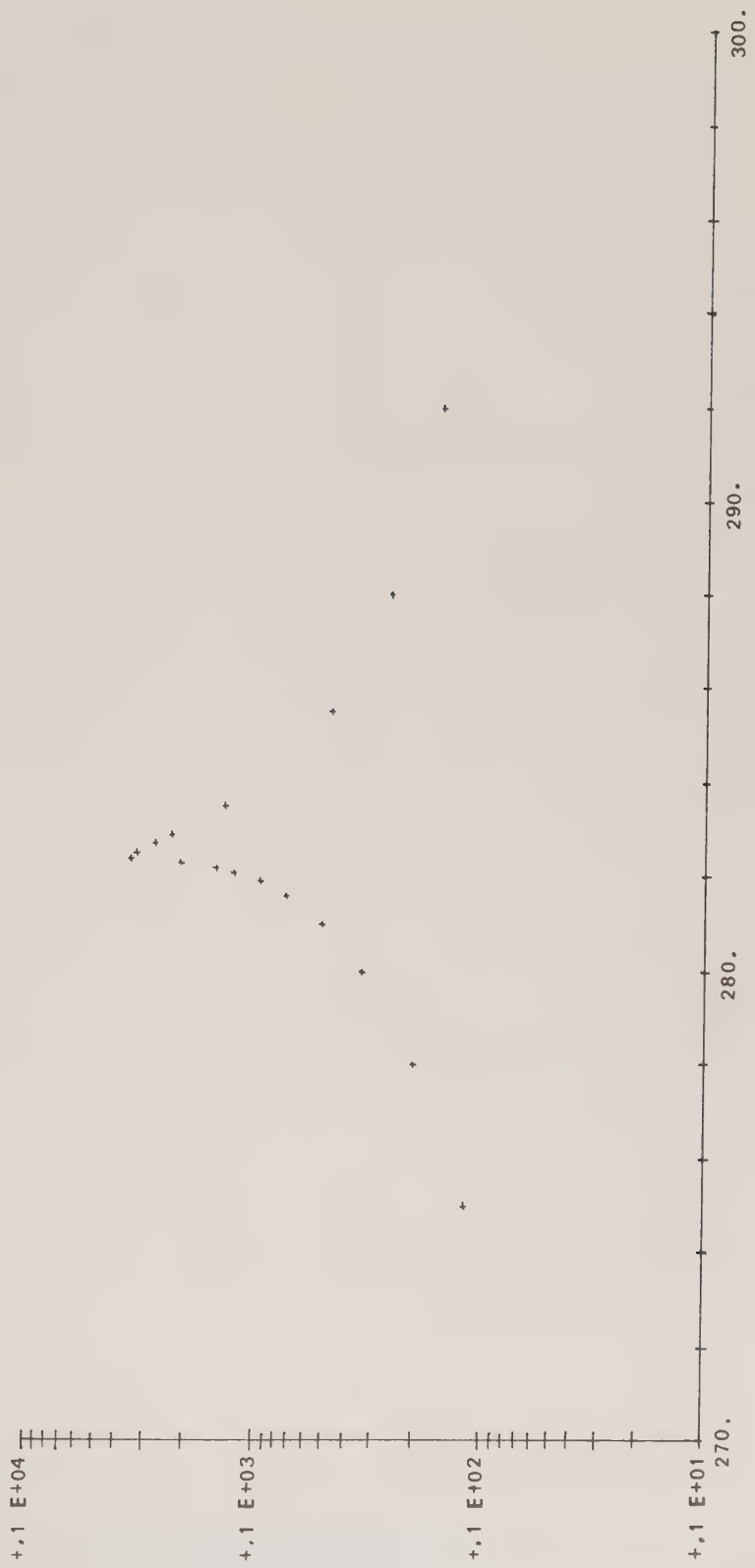
Les lieux de Nyquist correspondants sont des cercles déformés en ovale fig. (35). Le lissage par le programme linéaire donne un cercle, passant au mieux par l'ensemble de ces points. Pratiquement tous les points calculés sont proches des points mesurés à l'exception de deux points correspondant aux grandes amplitudes. Les valeurs des pulsations propres complexes obtenues sur chaque point sont très voisines, cependant l'identification n'a pas été effectuée correctement. Pour s'en convaincre, il suffit d'effectuer à nouveau le lissage en prenant l'ensemble des points avant la résonance, puis après la résonance fig. (36). On constate alors que si la coïncidence entre les valeurs complexes calculées sur les différents points est excellente par contre, il y a d'énormes variations entre les valeurs propres s_v et les numérateurs t_v (dans le rapport 1 à 2) obtenus par lissage avant et après la résonance. Pris individuellement, les lissages semblent corrects, mais ils ne sont pas cohérents entre eux.

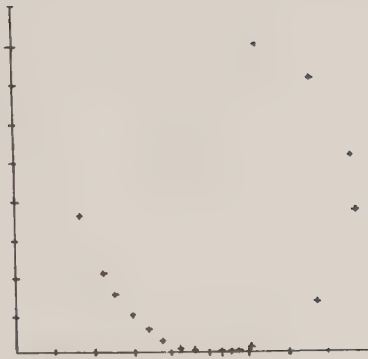
Pour remédier à cet inconvénient, nous proposons deux types de solution : étudier des mesures à amplitude constante et à force constante.

4.1. Mesures à amplitude constante :

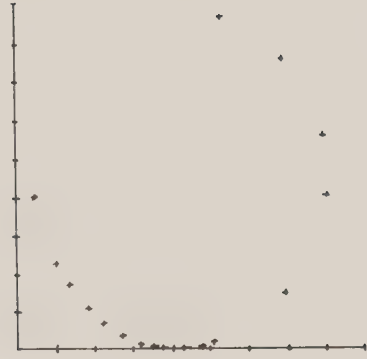
Lorsque l'on étudie une structure non linéaire, les non linéarités de raideur et d'amortissement peuvent être considérés comme des fonctions de l'amplitude et de la déformée de la structure. Au voisinage d'une fréquence propre isolée, la déformée sera quasiment invariable si l'amplitude est asservie à une valeur constante. Les non linéarités

FIG. 34

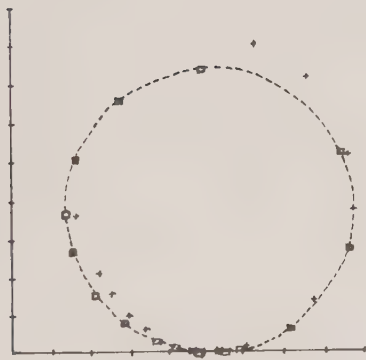




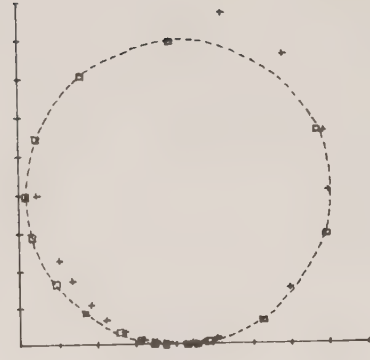
Transfert 2-6



Transfert 2-7



Transfert 2-6



Transfert 2-7

$$S = -1.907 + J * 1775.05$$

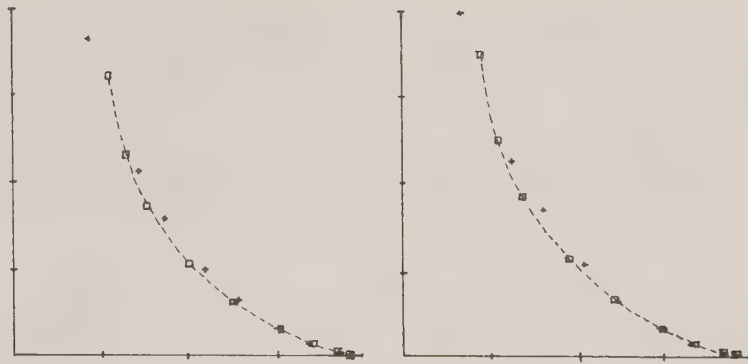
$$T = +.206E-05 + J * .140E-03$$

$$S = -1.907 + J * 1775.07$$

$$T = .365E-05 + J * .150E-03$$

+ : Points mesurés
 □ : Points calculés

Fig. 35 : LISSAGE PAR LE PROGRAMME LINEAIRE D'UNE
STRUCTURE NON LINEAIRE



Transfert 2-6

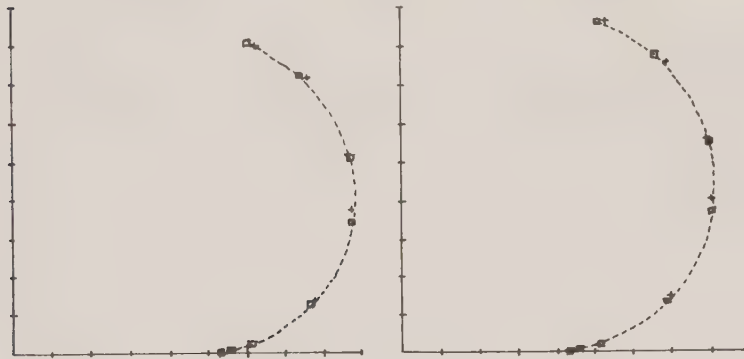
$$S = -1.541 + J \cdot 1775.71$$

$$T = +.182E-04 + J \cdot .108E-03$$

Transfert 2-7

$$S = -1.536 + J \cdot 1775.66$$

$$T = .189E-04 + J \cdot .115E-03$$



Transfert 2-6

$$S = -2.989 + J \cdot 1773.76$$

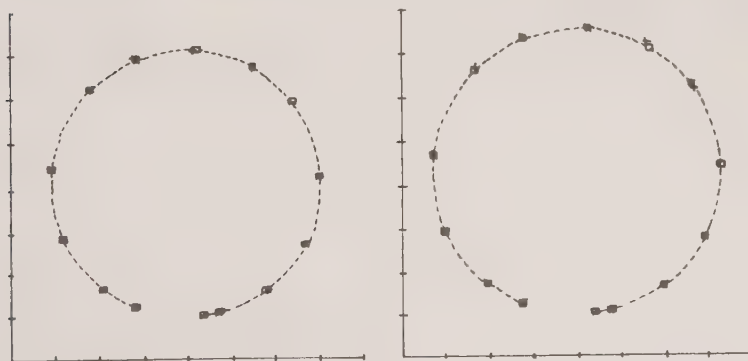
$$T = -.143E-04 + J \cdot .249E-03$$

Transfert 2-7

$$S = -3.019 + J \cdot 1773.78$$

$$T = -.122E-04 + J \cdot .269E-03$$

Fig. 36 : LISSAGE AVANT ET APRES LA RESONANCE



Transfert 2-6

$$S = -2.766 + J \cdot 1777.41$$

$$T = .394E-06 + J \cdot .169E-03$$

Transfert 2-7

$$S = -2.766 + J \cdot 1777.41$$

$$T = .171E-05 + J \cdot .181E-03$$

Fig. 37 : MESURES A AMPLITUDE CONSTANTE

n'apparaîtront pas et les mesures seront cohérentes avec le modèle linéaire utilisé pour le dépouillement. En modifiant l'amplitude, on peut tracer l'évolution de la fréquence et de l'amortissement en fonction de l'amplitude. On peut donc très bien identifier une structure non linéaire en exploitant une méthode de dépouillement linéaire.

Dans le cas de modes proches cette méthode peut toujours être appliquée en isolant successivement chaque mode. Pour cela, l'excitation doit être grossièrement appropriée au mode isolé ce qui nécessite une excitation multipoint. Rappelons que l'appropriation consiste à isoler un mode en choisissant de manière convenable des forces excitatrices (Références : Deck (7-11), Clerc (12)).

La figure 37 donne le dépouillement effectué sur la structure précédente pour laquelle les mesures ont été effectuées à amplitude constante. On voit que les lieux de Nyquist sont des cercles quasi-parfaits, comme ils le seraient pour une structure linéaire. La correspondance entre points mesurés et calculés par lissage linéaire est excellente et les valeurs propres complexes calculées sur les différents points sont extrêmement voisines. Cet essai à amplitude constante a donc permis de caractériser le modèle linéaire équivalent à la structure non linéaire pour l'amplitude de fonctionnement choisie.

4.2. Mesures à force constante pour un mode isolé dans le spectre :

Si l'on introduit la non linéarité comme étant un terme dépendant de l'amplitude, on peut représenter, au voisinage d'une pulsation propre isolée, la mobilité au point i par la relation :

$$y_i = u_i + s v_i + \frac{y_{vi} \cdot T_{y_v}}{s - s_v (1 + \alpha |A|^\gamma)} f \quad (1)$$

où A dépend de l'amplitude. $A^2(s, f) = T_{\bar{y}} \cdot y$
 α est une constante complexe.
 γ est une constante réelle.

Cette relation s'inspire du résultat obtenu pour les systèmes non linéaires à un degré de liberté faisant l'approximation dite du "premier

harmonique". La relation (1) permet d'obtenir une bonne approximation du comportement dynamique de la structure si les modes sont isolés et si les non linéarités sont faibles. Il est en particulier nécessaire pour exploiter cette méthode que le mouvement de la structure soit approximativement sinusoïdal si la force appliquée est sinusoïdale.

Compte tenu de ces hypothèses, le lissage des fonctions de transfert est effectué en exploitant la méthode précédente. On assimile simplement le paramètre α aux paramètres q_j à déterminer. Le paramètre γ est imposé. On le détermine par approximations successives pour que les valeurs calculées correspondent au mieux aux valeurs mesurées. Il est à noter que la valeur de l'exposant γ ne peut être choisie que si les amortissements sont faibles, de sorte que l'amplitude A varie d'au moins deux décades lors de l'essai à force constante.

On présente figure 38 les résultats obtenus par la structure excitée à force constante. La coïncidence entre points calculés et mesurés est parfaite et on voit que le phénomène de saut est très bien rendu par l'expression analytique (1). De plus, on constate que la constante complexe α déterminée pour chaque point est pratiquement la même, ce qui confirme l'hypothèse qui avait été faite au départ.

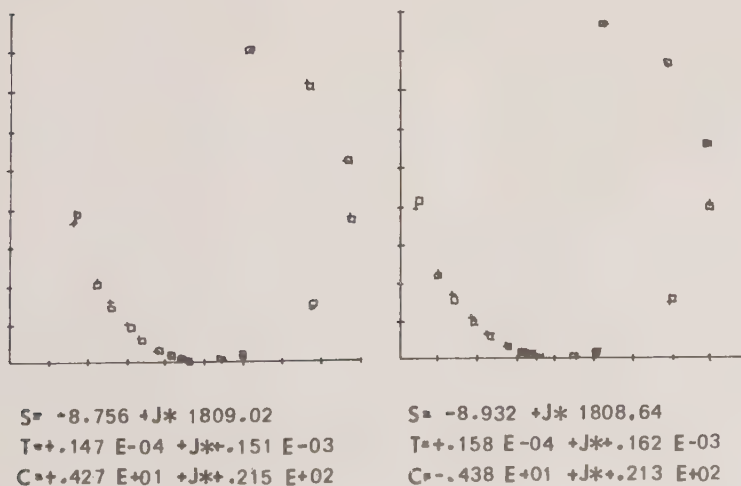


Fig. 38 : Mesures à force constante

CONCLUSION

Le but de ce travail de thèse était de compléter la panoplie de méthodes d'identification mises au point au Laboratoire, par une méthode pouvant être utilisée dans le cas où les mesures sont fortement bruitées. Dans ce cas, ce sont les méthodes de lissage de fonction de transfert qui s'imposent.

Un examen des méthodes proposées jusqu'alors a montré quelles en étaient les faiblesses, en particulier, mauvais conditionnement numérique des matrices et surtout choix par l'opérateur du degré du numérateur de la fonction de transfert.

On s'est alors orienté vers la méthode proposée qui présente les avantages suivants :

- On ne fait pas d'hypothèses à priori sur la nature des amortissements.

- L'expression analytique employée est simple. Elle permet d'analyser simultanément plusieurs modes en tenant compte de l'influence des modes adjacents.

- Les essais effectués sur des cas du Laboratoire ou industriels n'ont pas mis en évidence de difficultés particulières pour les calculs numériques.

- On peut effectuer le dépouillement d'essais vibratoires résultant d'excitations monopoints ou multipoints.

- Enfin, de par la méthode numérique employée, il n'y a aucune difficulté à introduire dans la fonction de transfert un terme non linéaire. Les premiers essais effectués, qui seront poursuivis afin d'affiner la méthode permettent d'ores et déjà de définir un modèle mathématique non linéaire représentant le comportement dynamique de la structure.

Les résultats obtenus ont été suffisamment convaincants pour intéresser l'E.D.F. qui implante actuellement ces programmes d'une part sur l'ordinateur de leur camion laboratoire, d'autre part, sur l'ordinateur de leur centre de calcul. Les mesures pourront être ainsi dépouillées directement sur site ou en temps différé à Clamart.

A N N E X E

ORGANISATION DES ESSAIS EN VIBRATION

Les essais sont effectués en régime harmonique. Les structures étudiées ayant une masse variant de quelques kilogrammes à quelques dizaines de kilogrammes, un matériel spécifique a été développé au Laboratoire de Mécanique Appliquée, autour d'un système d'acquisition et traitement MITRA 15.

L'organisation générale des essais est donné par le tableau synoptique fig. 39 . La structure est généralement excitée en un seul point à force ou accélération constante. Pour une structure à comportement linéaire, la méthode la plus simple consiste à exciter la structure à force constante, on obtient alors directement la réponse en fréquence. Par contre, pour une structure présentant un caractère non linéaire, on travaille à amplitude constante autour d'un mode, de manière à éliminer les non-linéarités, ce qui revient en fait, compte tenu des coefficients de surtension couramment rencontrés à travailler à accélération constante. Dans ce cas, il convient de diviser les réponses mesurées par la valeur effective de la force appliquée, pour obtenir la réponse en fréquence.

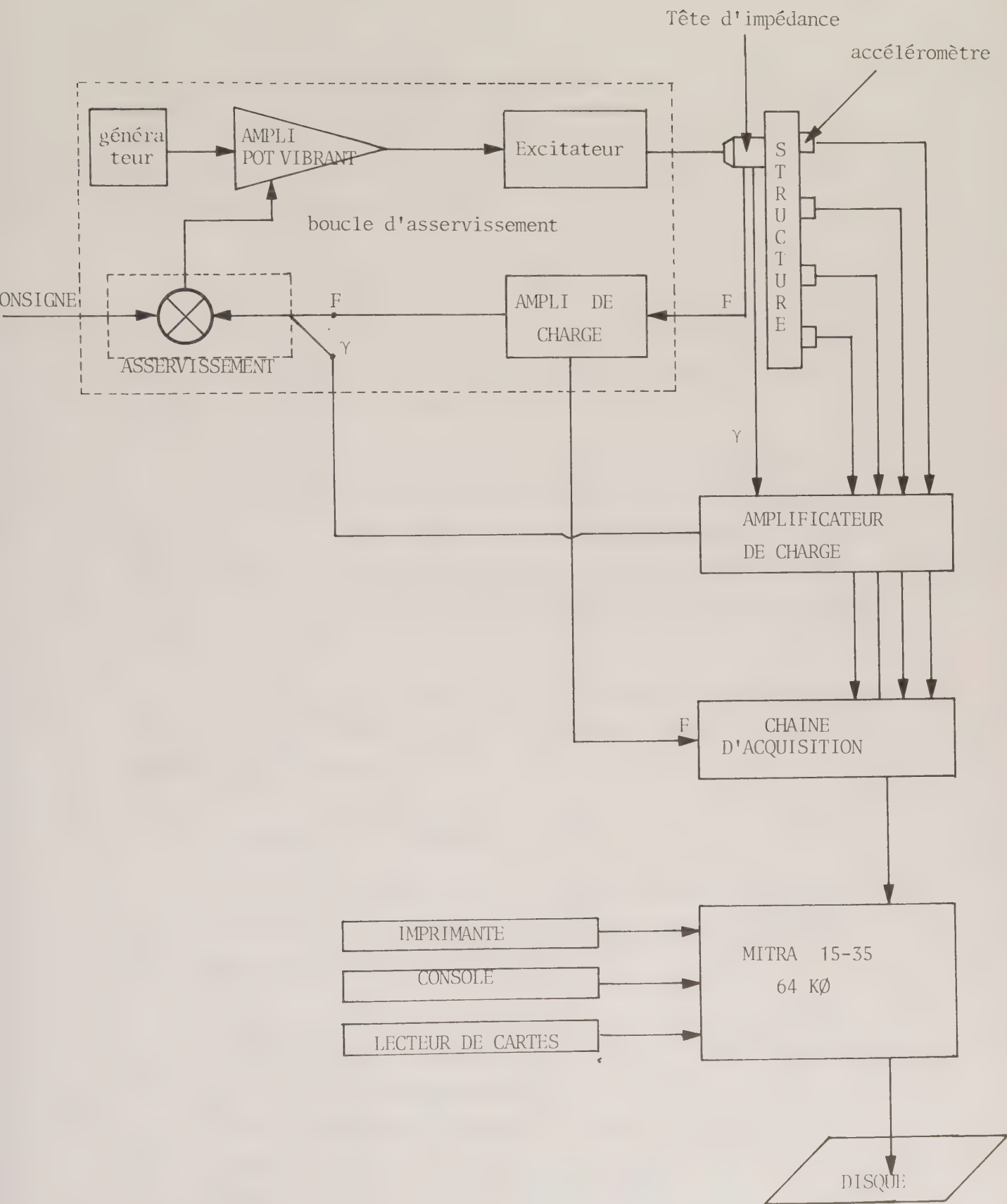
Dans le tableau synoptique 39 , on distingue deux parties :

- la partie analogique comportant l'excitation et l'analyse de la structure
- la partie numérique d'acquisition et traitement des données.

1) Excitation et analyse des vibrations :

La structure est généralement excitée en un seul point, mais dans des cas particuliers, on peut placer plusieurs excitateurs. Une série de pots vibrants a été développée au Laboratoire, avec leur électronique associée, permettant d'exciter des structures légères avec une force maximale de 10N dans la bande 0-8000 Hz. Les dimensions approximatives sont de $\varnothing$: 100 x 100 mm. La force appliquée est mesurée à l'aide d'une tête d'impédance classique (type Bruel et Kjaer) ou pour de petites structures par des capteurs piézoélectriques construits également au Laboratoire. La liaison cellule de

Fig. 39



force structure est assurée par un fil rigide longitudinalement et souple latéralement de manière à ne pas imposer une composante de force axiale sur la bobine mobile du pot. Les dimensions sont déterminées de telle sorte qu'il n'y ait pas de résonances transversales dans la bande de fréquence utile.

Les capteurs sont des accéléromètres collés ou vissés sur la structure. Les mesures de force et accélération étant effectuées à l'aide de capteurs piézoélectriques, la conversion charge tension est assurée par le même type d'amplificateur de charge. Ces amplificateurs sont groupés par 8 dans deux racks.

La fréquence d'excitation est délivrée par un synthétiseur dont la résolution est de 0,01 Hz. L'asservissement de l'accélération ou de la force à un niveau constant est assuré par un compresseur commandant l'ampli du pot à partir de l'écart entre une consigne et la valeur effective de la force ou de l'accélération à la sortie des ampli de charge.

Pour des raisons de précision et de commodité, le traitement des signaux n'est pas effectué par des multiplieurs analogiques mais directement par voie numérique.

2) acquisition et traitement de données

Le système d'acquisition et traitement est bâti autour d'un ordinateur MITRA 15 de 64 octets de mémoire centrale et possédant les périphériques suivants :

- Télétype de service
- Lecteur de carte 300 c/mn
- Imprimante 180 caractères/sec
- Console graphique de visualisation Tektronix 4014
- Disque 2 x 5 M Ø
- Chaîne de conversion analogique digitale.

C'est ce dernier élément qui permet de convertir les signaux analogiques en numérique. Les caractéristiques sont les suivantes : 16 voies d'entrée (extensible), bases de temps programmable, cadence de conversion maximale 50 000/sec, conversion sur 12 bits dont 1 bit de signe (Résolution 5 mV sur 10 V).

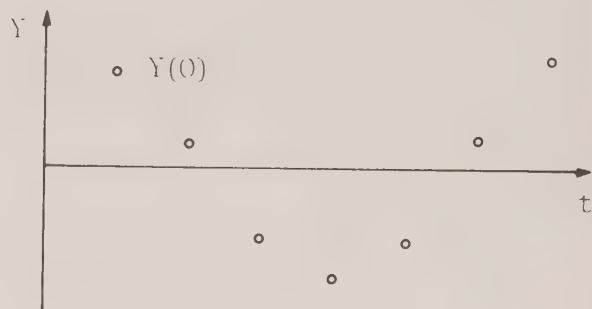
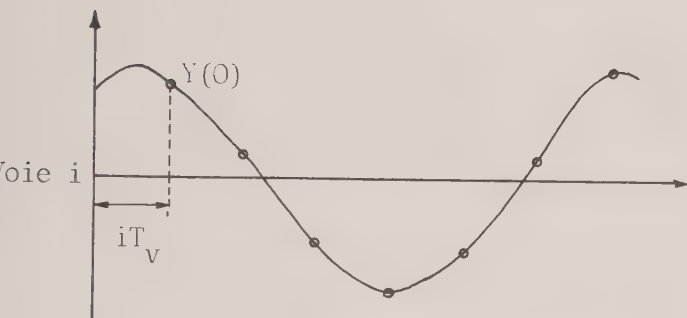
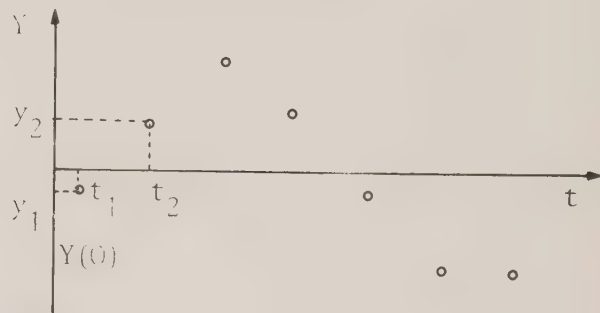
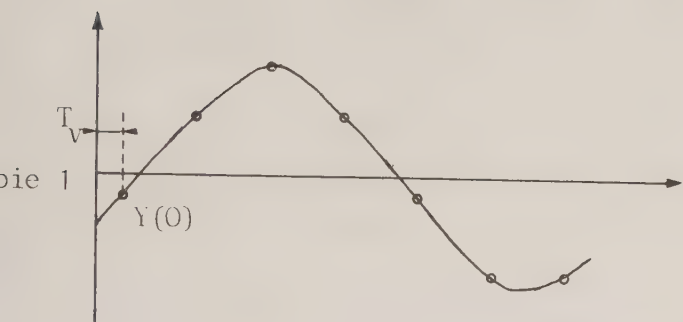
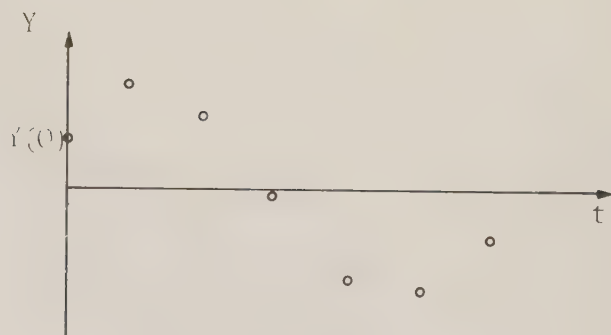
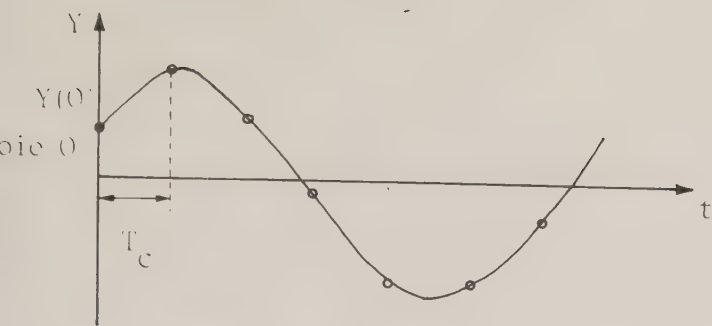
La cadence d'échantillonnage et de stockage des données sont donnés par un programme écrit en assembleur, ces données numériques permettent de calculer directement l'amplitude et la phase des signaux capteurs par rapport à l'excitateur sans autre intermédiaire, on arrive ainsi à une résolution du degré sur la phase et du % sur l'amplitude.

Principe de l'échantillonnage.

L'échantillonnage des points sur l'ensemble des voies est cadencé par deux horloges programmables par l'utilisateur. Nous allons en exposer le principe sur un exemple précis.

Supposons que N capteurs soient connectés à N entrées de la chaîne analogique. Nous voyons sur la figure p 106 que les voies sont scrutées par ordre croissant à la cadence $f_v = \frac{1}{T_v}$, T_v étant la période d'échantillonnage entre voies.

Lorsque toutes les voies ont été scrutées, on recommence à partir de la voie 0 au temps T_c si l'on définit l'origine des temps au premier point de la voie 0. T_c (période de synchronisation des cycles) ainsi que T_v sont modifiables à volonté par programme. La seule constante imposée par le hardware de la chaîne analogique est que T_c soit un multiple de T_v . On doit bien sûr avoir la relation $T_c \geq N.T_v$. Pratiquement, les valeurs T_c et T_v sont calculées à partir de la fréquence d'excitation de manière à ce que l'on ait un nombre de points par période fixé à priori :



La fréquence maximale que l'on peut échantillonner dépend du nombre de voies et du nombre de points échantillonnés par période. Par exemple, si on se fixe 6 points par période, la fréquence maximale d'échantillonnage étant de 30 000 mesures par seconde, on ne pourra pas échantillonner un signal dont la période excèdera $6 \times 16/30\ 000 = 3,2$ ms soit une fréquence maximale de 315 Hz.

Pour des fréquences plus élevées, comme il s'agit de signaux stationnaires, on peut échantillonner successivement la force (voie 0) et la voie 1, puis la force et la voie 2 etc... On double pratiquement le nombre de mesures, mais on peut ainsi échantillonner des signaux dont la fréquence est 8 fois plus grande, soit 2520 Hz, ce qui est largement suffisant pour les structures testées au Laboratoire.

Détermination de l'amplitude et de la phase des signaux.

Après échantillonnage, on dispose pour chaque voie d'un ensemble de points représentant les signaux discrétisés (fig.p106). De cet ensemble de points, il faut extraire les informations suivantes :

- amplitude de la force,
- amplitude et phase de chaque capteur par rapport à la force.

Pour cela, on procède en plusieurs étapes :

1°) On calcule l'amplitude et la phase pour chaque voie en prenant comme origine des temps, l'acquisition du premier point . de la voie 0.

2°) On corrige la phase sur les voies 1 à N en tenant compte du déphasage systématique ramené par la synchronisation voie: $\omega \cdot T_V$ pour la voie 1, $2 \omega T_V$ pour la voie 2 ..., t_n étant la pulsation d'excitation.

3°) On ramène toutes les phases à celle de la voie 0 de manière à obtenir la phase des capteurs par rapport à la force.

L'amplitude A et la phase ϕ du signal sont calculés en déterminant la fonction $y = A \sin (\omega t + \phi)$ qui passe au mieux par l'ensemble des points. On a donc à résoudre le système non linéaire surdimensionné suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = A \sin (\omega t_1 + \phi) \\ y_2 = A \sin (\omega t_2 + \phi) \\ \vdots \\ y_n = A \sin (\omega t_n + \phi) \end{array} \right.$$

$$\text{Posons } f_i(A, \phi) = y_i - A \sin(\omega t_i + \phi) = 0$$

Il s'agit de résoudre le système $f_i(A, \phi) = 0$; $i = 1, \dots, n$
Supposons que l'on connaisse les valeurs approximatives A_0, ϕ_0 de A
et ϕ . Effectuons un développement au premier ordre de chaque fonction f_i au voisinage de A_0 et ϕ_0 . Il vient :

$$f_i(A, \phi) = f_i(A_0, \phi_0) + dA \frac{\partial f_i}{\partial A}(A_0, \phi_0) + d\phi \frac{\partial f_i}{\partial \phi}(A_0, \phi_0) = 0$$

d'où sous forme matricielle, pour l'ensemble des n équations :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial f_i}{\partial A} & \frac{\partial f_i}{\partial \phi} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline dA \\ \hline d\phi \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline f_i(A_0, \phi_0) \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}$$

nx2 2x1 nx1

Soit, sous forme condensée :

$$B \cdot dX = Z$$

Dans cette expression, l'inconnue est le vecteur dX que l'on calcule par une méthode des moindres carrés, soit :

$$dX = ({}^T B B)^{-1} {}^T B Z$$

On procède par approximations successives. Partant de la valeur initiale ${}^T X_0 = {}^T(A_0, \phi_0)$, on calcule dX par la relation précédente. On obtient une nouvelle valeur $X_1 = X_0 + dX$. Le processus est ensuite réitéré jusqu'à ce qu'il y ait stabilisation des valeurs calculées.

On arrive ainsi à déterminer l'amplitude et la phase par voie purement numérique, sans que les temps de calcul soient prohibitifs (de l'ordre de quelques secondes pour une dizaine de capteurs).

La valeur initiale A_0 est fixée préalablement à l'amplitude maximale déterminée sur l'ensemble des points (fig.p 106) alors que

ϕ_0 est déterminé en effectuant une interpolation linéaire entre les deux premiers points pour lesquels les amplitudes sont de signes contraires.

Stockage des résultats.

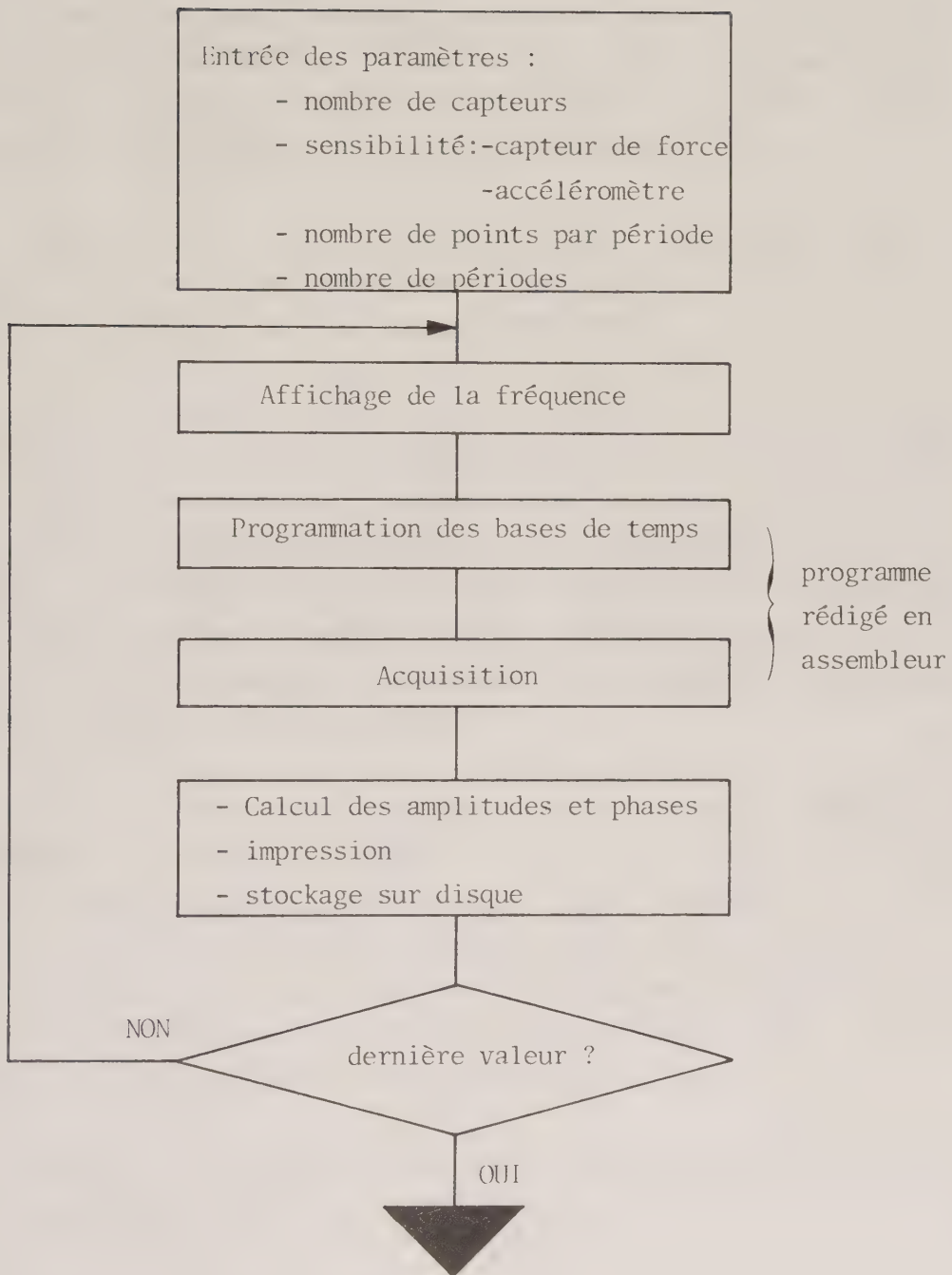
Les seules données à conserver sont :

- la fréquence
- l'amplitude de la force
- l'amplitude et la phase de chaque capteur.

En fait, la force est normalisée à 1 et on stocke sur disque les réponses sous la forme partie réelle - partie imaginaire ce qui permet d'obtenir directement la fonction de transfert, que les essais aient été effectués à accélération ou force constante. Le lissage des fonctions de transfert pour une structure non linéaire fait intervenir l'amplitude réelle du mouvement. On stocke donc la valeur effective de la force de manière à pouvoir recalculer cette amplitude.

Déroulement d'un essai.

Le programme d'acquisition a été rédigé de manière conversationnelle, les entrées se faisant à la console Tektronix. Le déroulement d'un essai est représenté par l'organigramme suivant :



L'affichage de la fréquence est effectué manuellement par l'opérateur. Les bases de temps sont alors programmées de manière à obtenir le nombre de points souhaité par période. Généralement, on prend 6 points par période et afin d'effectuer un lissage, on échantillonne 3 périodes, si bien que l'amplitude et la phase sont calculées en résolvant un système surdimensionné de 18 équations à 2 inconnues.

Pour gagner du temps, les sous-programmes "programmation des bases de temps" et "acquisition" sont écrits en assembleur, alors que le programme principal est rédigé en FØRTRAN.

Il est à noter que pour l'instant, l'essai nécessite le concours de deux personnes : une personne affichant la fréquence au synthétiseur, et une autre la reportant à la console, et déclenchant l'acquisition lorsque les signaux capteurs sont stabilisés. Une nouvelle version est en cours d'implantation, ne nécessitant la présence que d'un opérateur. La fréquence affichée au synthétiseur est transmise directement par voie numérique au MITRA et le déclenchement de l'acquisition est commandé à distance par le même opérateur.

On peut également envisager une conduite des essais automatique en pilotant le synthétiseur à partir du MITRA, en prenant un pas de fréquence constant en dehors des résonances, et en resserrant ce pas autour des résonances (lorsque la phase varie, le critère pouvant être à $\Delta\phi =$ constante). Cependant, cette méthode, si elle permet de dégrossir un essai, est souvent mise en échec lorsque se posent des problèmes particuliers tels que fréquences proches, non linéarités, etc...

On donne ici un listing édité lors d'une acquisition effectuée sur la poutre repliée.

C/42AKI/

2AKI 0000

70CC 71DB D316

11 VOIES, 3 PERIODES, 6 POINTS PAR PERIODE
SENSIBILITE DU CAPTEUR DE FORCE = 2.50 VOLTS/NEWTON
SENSIBILITE DES ACCELEROMETRES = 1.00 VOLTS/G

Accéléromètre n° 8 (amplitude, phase)														
1	100.00	2.003	2.020	164.0	2.210	-179.4	4.486	175.8	3.859	-185.3	0.523	177.1	3.486	
2	105.00	1.000	0.181	283.0	0.390	-28.7	0.146	330.3						
			-0.969	0.277	-1.104	-0.011	-2.234	0.164		-1.917	0.178	-0.261	0.013	1.729
		2.003	0.020	-0.088	0.171	-0.093	0.063	-0.036		4.999	-187.0	0.736	173.3	4.700
			3.932	165.7	2.044	-177.7	5.482	174.4		-2.474	0.303	-0.365	0.043	2.319
3	110.00	1.000	0.652	-39.5	0.941	-28.6	0.376	-26.2						
			-1.903	0.486	-1.019	-0.042	-2.716	0.266		7.057	169.2	0.968	-182.8	7.518
		2.004	7.478	162.9	0.413	-0.225	0.169	-0.083		-3.459	0.658	-0.482	0.024	3.600
			2.525	-39.1	1.723	-172.5	7.210	-189.0		8.445	-194.1	1.029	184.8	10.098
4	112.00	1.000	-3.565	1.096	-0.852	-0.112	1.135	-32.4						
			0.977	-0.793	1.187	-0.819	0.478	-0.304		-4.082	1.024	-0.512	-0.043	4.618
		2.006	9.987	-201.5	1.525	198.5	8.349	167.8		9.364	162.4	1.070	-165.3	12.271
			4.836	-44.8	5.284	317.9	2.023	-41.2		-4.456	1.412	-0.517	-0.135	5.275
5	113.00	1.000	-4.634	1.826	-0.721	-0.241	-4.072	0.883						
			1.708	-1.699	1.954	-1.768	0.758	-0.664		10.340	156.3	1.336	-146.4	15.289
		2.005	11.836	-206.1	1.470	209.3	9.138	-195.4		-4.716	2.068	-0.554	-0.369	5.578
			7.193	-52.1	7.671	310.5	2.923	-48.9						
6	114.00	1.000	-5.300	2.601	-0.640	-0.359	-4.395	1.209						
			2.204	-2.829	2.483	-2.908	0.958	-1.097						
		2.007	13.976	145.3	1.685	224.8	9.896	-200.9						
			11.169	-65.3	11.734	296.8	4.451	-63.0						
		1.000	-5.722	3.961	-0.595	-0.592	-4.604	1.756						
			2.324	-5.059	2.644	-5.223	1.007	-1.975						

Fréquence

Valeur réelle
de la force

force normée
à 1

Accéléromètre n° 1 (amplitude, phase)

Accéléromètre n° 1 (phase, quadrature)

Accéléromètre n° 5 (amplitude, phase)

B I B L I O G R A P H I E

- 1 - R. BASILE - "Recherche des caractéristiques dynamiques des systèmes continus". Colloque International de Mécanique. 1950. POITIERS.
- 2 - R. FILLOD - "Contribution à l'identification des structures mécaniques linéaires". Thèse Doct. ès Sciences. Mécanique. Besançon (1980).
- 3 - C.C. KENNEDY et C.D.P. PANCU - "Use of vectors in vibration measurements and analysis". J. aero. Sci., Nov. 1947, Vol. 14.
- 4 - J.W. PENDERED et R.E.D. BISHOP - "A critical introduction to some industrial resonance testing techniques". J. mech. eng. Sci., 1963, vol. 5.
- 5 - R.E.D. BISHOP et G.M.L. Gladwell - "An investigation into the theory of resonance testing". Phil. Trans., 1963, vol. 255.
- 6 - R.C. LEWIS et D.L. WRISLEY - "A system for the excitation of pure natural modes of complex structures". J. aero. Sci. 1950, vol. 17.
- 7 - A. DECK - "Méthode automatique d'appropriation des forces d'excitation dans l'essai au sol d'une structure d'avion". EUROMECH 22. Dynamics of Mechanics. New castle upon tyne (1970). Ref. ONERA 870.
- 8 - A. DECK - "Contribution à l'étude d'une méthode semi-automatique d'appropriation". Note technique. ONERA n° 129 (1968)
- 9 - D. CLERC - "Méthode de recherche des modes propres par calcul de l'excitation harmonique optimum d'après les résultats bruts d'essais de vibrations". Note technique ONERA n° 119 (1967).
- 10 - D. CLERC - "Une méthode d'appropriation des forces d'excitation aux modes propres non amorties d'une structure". Recherche Aérospatiale n° 85 (1961)
- 11 - D. CLERC - "Sur l'appropriation des forces d'excitation lors des essais de vibration en régime harmonique". Recherche Aérospatiale n° 87. (1962).
- 12 - D. CLERC - "Reconstitution des formes et fréquences propres à partir d'un essai de vibrations effectué avec une excitation non exactement appropriée". Recherche Aérospatiale n° 111 (1966).
- 13 - R.W. TRAIL NASCH - "On the excitation of pure natural modes in aircraft resonance testing". Journal of the Aero-space Sciences. Décembre (1958).

- 14 - G. DE VRIES - "Nouveaux procédés pour la détermination des valeurs caractéristiques dans l'essai de vibration". Note technique ONERA n° 82 (1965).
- 15 - J. ANGELINI - "Une nouvelle méthode de mesures des formes modales des structures aéronautiques". Xème Congrès International des Sciences Aéronautiques IACS-OTTAWA (1976). ICAS Paper n° 76-77. (ONERA - TP 1976-117).
- 16 - G.W. ASHER - "A method of normal mode excitation utilizing admittance measurements". Proc. National Specialist Meeting in Dynamics and Aeroelasticity (1958)
- 17 - R. FILLOD et J. PIRANDA - "Etude d'une méthode d'appropriation des systèmes linéaires". Conférence de Liblice. 1973.
- 18 - R. FILLOD et J. PIRANDA - "Research method of the eigenmodes and generalized elements of a linear mechanical structure". Shock & Vibration Bull. n° 48. Part. 3. Sept. 78.
- 19 - R. POTTER et M. RICHARDSON - "Mass, Stiffness and damping matrices from measured modal parameters". Presented at the International instrumentation Automation Conference and Exhibit of the Instrument Society of America. New-York. 28/31 Oct. 1974.
- 20 - M. RICHARDSON - "Modal analysis using digital test systems". Presented at the Seminar on Understanding Digital Control and Analysis in Vibration Test Systems of the Shock and Vibration Information Center. Greenbelt Juin 1975.
- 21 - A.L. KLOSTERMANN et R. ZIMMERMANN - "Modal Survey activity via frequency response functions". Presented at the 1975 SAE Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting. Los Angeles. 17/20 Nov. 1975.
- 22 - M. RICHARDSON et J. KNISTERM - "Identifying modes of large structures from multiple input and response measurements". Presented at the 1976 SAE Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting. San Diego. 30 Nov. 76.
- 23 - B. DARAAS - "Identification des systèmes vibrants par la méthode du décréement aléatoire". R.F.M. n° 59 (1976).
- 24 - S.R. IBRAHIM and E.C. MIKULCIK - "The experimental determination of vibration parameters from time responses". Shock and Vib. Bul. Part. 5. Août (1976).
- 25 - S.R. IBRAHIM and E.C. MIKULCIK - "The experimental determination of vibration parameters shock and vibration". Bulletin Parts (1976)

- 26 - S.R. IBRAHIM and E.C. MIKULCIK - "A time domain modal vibration test technique". Shock and Vibration Bulletin n° 43. part. A.
- 27 - A.R. THOREN - "Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data". AIAA. April (1972). Paper n° 72.346.
- 28 - R.DAT et J.L. MEURZEC - "Exploitation par lissage des mesures d'admittance d'un système linéaire". Recherche Aérospatiale n°4. (1972).
- 29 - "L'évolution des méthodes d'étude des systèmes vibratoires". Revue Française de Mécanique. n° 58-59 et 60 (1976). (articles de synthèse de divers auteurs).
- 30 - E.G. DUDNIKOV - "Détermination des coefficients de la fonction de transfert à l'aide de caractéristiques amplitude phase". Automatika XX (1959) n° 5.
- 31 - KARDACHOV KARMINCHINE - "Détermination des paramètres de système dans les caractéristiques fréquentielles expérimentales". Automatika i telemekhanika XIX. (1958).
- 32 - S. GENTIL et C. FOULARD - "Comparaison des résultats de l'identification dynamique d'une colonne à distiller pilote à l'aide de diverses méthodes statiques". RAIRO. Avril (1974). J. 1.
- 33 - R. DAT et J.L. MEURZEC - "Exploitation par lissage mathématique des mesures d'admittance d'un système linéaire". Rech. Aérosp. n° 1972. 4.

